पाठ - 9 : अवकल समीकरण

प्रश्नावली 9.1

1. $\frac{d^4y}{dx^4} + \sin(y''') = 0.$

उत्तर- कोटि = 4.
घात = परिभाषित नहीं है ।

2. $y' + 5y = 0.$

उत्तर- कोटि = 1.
घात = 1.

3. $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3s\frac{d^2s}{dt^2} = 0.$

उत्तर- कोटि = 2.
घात = 1.

4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \cos\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

उत्तर- कोटि = 2.
घात = परिभाषित नहीं है ।

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos 3x + \sin 3x$

उत्तर- कोटि = 2.

घात = 1.

6. $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0.$

उत्तर- कोटि = 3.
घात = 2.

7. $y''' + 2y'' + y' = 0.$

उत्तर- कोटि = 3.
घात = 1.

8. $y' + y = e^x.$

उत्तर- कोटि = 1.
घात = 1.

9. $y'' + (y')^2 + 2y = 0.$

उत्तर- कोटि = 2.
घात = 1.

10. $y'' + 2y' + \sin y = 0$

उत्तर- कोटि = 2.
घात = 1.

11. अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

की घात है :

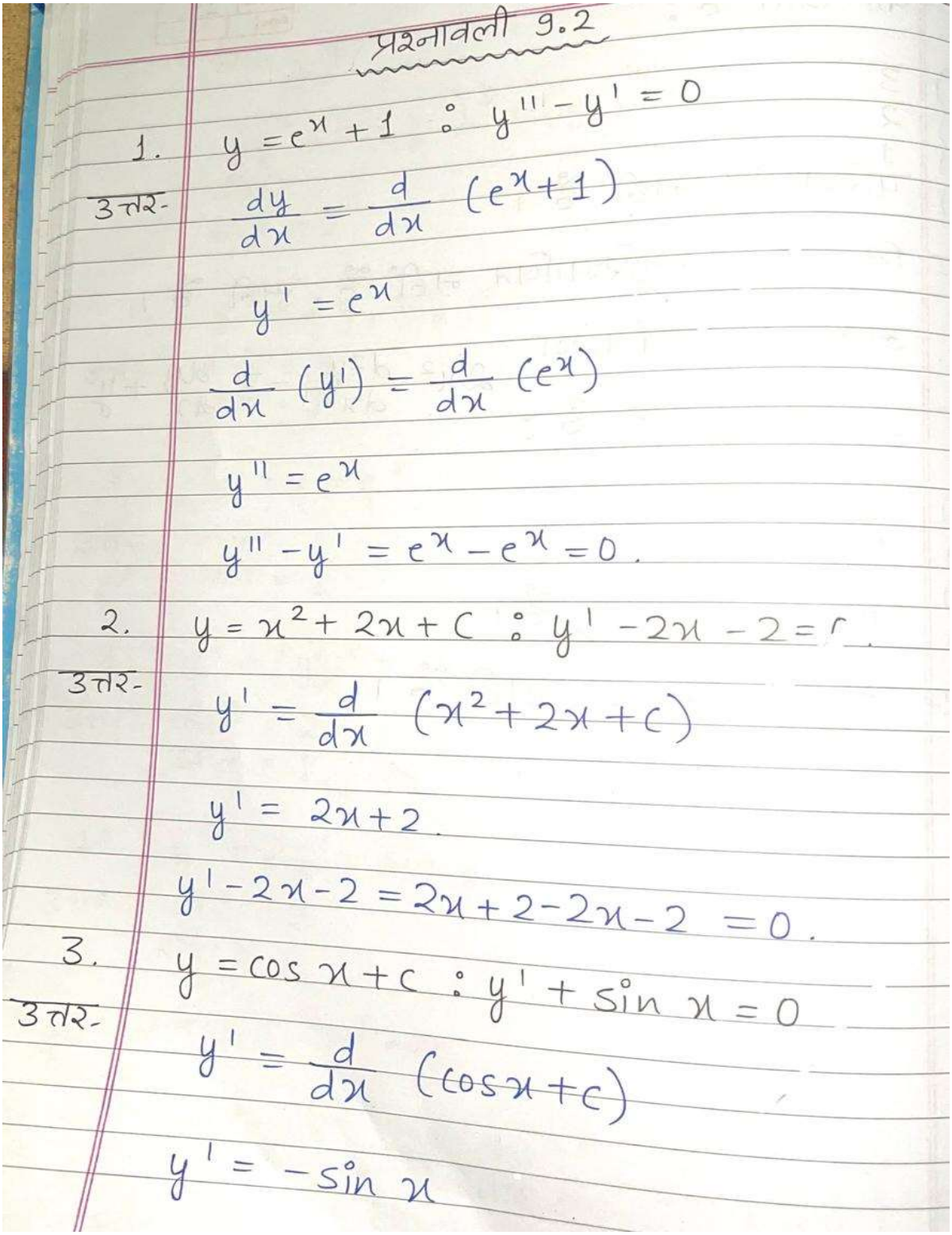
(A) 3
(B) 2
(C) 1
(D) परिभाषित नहीं है।

उत्तर- विकल्प (D) परिभाषित नहीं है, सही है।

12. अवकल समीकरण $2x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + y = 0$ की कोटि है :

(A) 2
(B) 1
(C) 0
(D) परिभाषित नहीं है।

उत्तर- विकल्प (A) 2, सही है।



प्रश्नावली 9.2

1. $y = e^x + 1 \; ; \; y'' - y' = 0$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x + 1)$

$y' = e^x$

$\frac{d}{dx}(y') = \frac{d}{dx}(e^x)$

$y'' = e^x$

$y'' - y' = e^x - e^x = 0.$

2. $y = x^2 + 2x + C \; ; \; y' - 2x - 2 = 0$

उत्तर- $y' = \frac{d}{dx}(x^2 + 2x + C)$

$y' = 2x + 2.$

$y' - 2x - 2 = 2x + 2 - 2x - 2 = 0.$

3. $y = \cos x + C \; ; \; y' + \sin x = 0$

उत्तर- $y' = \frac{d}{dx}(\cos x + C)$

$y' = -\sin x$

$y' + \sin x = -\sin x + \sin x = 0.$

4. $y = \sqrt{1+x^2} \;:\; y' = \dfrac{xy}{1+x^2}$

उत्तर- $y = \sqrt{1+x^2}$

$y' = \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{1+x^2}\right)$

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot \dfrac{d}{dx}(1+x^2)$

$y' = \dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$y' = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \sqrt{1+x^2}$

$y' = \dfrac{x}{1+x^2} \cdot y$

$y' = \dfrac{xy}{1+x^2}.$

5. $y = Ax \;:\; xy' = y \;(x \neq 0)$

उत्तर- $y' = \dfrac{d}{dx}(Ax)$

$y' = A$.

$xy' = x.A = Ax = y$.

6. $y = x \sin x$: $xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$

$(x \neq 0$ and $x > y$ or $x < -y)$

उत्तर- $y' = \frac{d}{dx}(x \sin x)$

$y' = \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$

$y' = \sin x + x \cos x$

$xy' = x(\sin x + x \cos x)$

$xy' = x \sin x + x^2 \cos x$

$xy' = y + x^2\sqrt{1 - \sin^2 x}$

$xy' = y + x^2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$

$xy' = y + x\sqrt{x^2 - y^2}$.

7. $xy = \log y + C$: $y' = \frac{y^2}{1 - xy}$ $(xy \neq 1)$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(\log y)$

$$y \cdot \frac{d}{dx}(x) + x \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$$

$$y + xy' = \frac{1}{y}y'$$

$$y^2 + xy \cdot y' = y'$$

$$(xy - 1)y' = -y^2$$

$$y' = \frac{y^2}{1 - xy}$$

8. $y - \cos y = x$: $(y \sin y + \cos y + x)y' = y$.

उत्तर- $\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x)$

$$y' + \sin y \cdot y' = 1$$

$$y'(1 + \sin y) = 1$$

$$y' = \frac{1}{1 + \sin y}$$

$$= (y \sin y + \cos y + x)y'$$

$$= (y \sin y + \cos y + y - \cos y) \times \frac{1}{1 + \sin y}$$

$$= y(1 + \sin y) \cdot \frac{1}{1 + \sin y} = y.$$

9. $x+y = \tan^{-1} y \, : \, y^2y' + y^2 + 1 = 0$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(x+y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} y)$

$$1 + y' = \left[\frac{1}{1+y^2}\right] y'$$

$$y'\left[\frac{1}{1+y^2} - 1\right] = 1$$

$$y'\left[\frac{1-(1+y^2)}{1+y^2}\right] = 1$$

$$y'\left[\frac{-y^2}{1+y^2}\right] = 1$$

$$y' = \frac{-(1+y^2)}{y^2}$$

∴ $y^2y' + y^2 + 1 = y^2\left[\frac{-(1+y^2)}{y^2}\right] + y^2 + 1$

$= -1 - y^2 + y^2 + 1$

$= 0.$

10. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, \; x \in (-a, a) \, : \, x + y$

$\frac{dy}{dx} = 0 \ (y \neq 0)$.

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(a^2 - x^2)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} (-2x)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$x + y\frac{dy}{dx} = x + \sqrt{a^2-x^2} \times \frac{(-x)}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= x - x = 0$.

11 चार कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के व्यापक हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है :

(A) 0.
B) 2.
C) 3.
D) 4.

उत्तर- विकल्प (D) 4, सही है।

12. तीन कोटि वाले किसी अवकल समीकरण के विशिष्ट हल में उपस्थित स्वेच्छ अचरों की संख्या है :

(A) 3.
(B) 2.
(C) 1.
(D) 0.

उत्तर- विकल्प (D) 0, सही है।

प्रश्नावली 9.3

अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin^2 x/2}{2\cos^2 x/2}$

$\frac{dy}{dx} = \tan^2 \frac{x}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right)$

$dy = \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$

$\int dy = \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} - 1\right) dx$

$y = \int \sec^2 \frac{x}{2}\, dx - \int 1 \cdot dx$

$y = 2\tan \frac{x}{2} - 1 + c$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

2. $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4-y^2} \quad (-2 < y < 2)$

उत्तर- $\int \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \int dx$

$\sin^{-1}\frac{y}{2} = x + c$

$\frac{y}{2} = \sin(x+c)$

$y = 2\sin(x+c)$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

3. $\frac{dy}{dx} + y = 1 \quad (y \neq 1)$

उत्तर- $dy + y\,dx = dx$

$dy = (1-y)\,dx$

$\frac{dy}{1-y} = dx$

$\int \frac{dy}{1-y}\,dx = \int dx$

$\log(1-y) = x + \log c$

$-\log c - \log(1-y) = x$

$\log c(1-y) = -x$

$c(1-y) = e^{-x}$

$1-y = \frac{1}{c} e^{-x}$

$y = 1 + \frac{1}{c} e^{-x}$

$y = 1 + Ae^{-x} \quad \left\{ A = \frac{1}{c} \right\}$

अत: समीकरण का अभीष्ट हल है।

4. $\sec^2 x \tan y \, dx + \sec^2 y \tan x \, dy = 0$

उत्तर- $\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$

$\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = -\frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$

$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = -\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy$

Let $\tan x = t$

$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{dt}{dx}$

$$\sec^2 x = \frac{dt}{dx}$$

$$\sec^2 x \, dx = dt$$

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx = \int \frac{1}{t} dt = \log t$$
$$= \log(\tan x)$$

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \log(\tan y)$$

$$\Rightarrow \log \tan(x) = -\log(\tan y) + \log c$$

$$\log(\tan x) = \log\left(\frac{c}{\tan y}\right)$$

$$\tan x = \frac{c}{\tan y}$$

$$\tan x \tan y = c.$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

5. $(e^x + e^{-x})\,dy - (e^x - e^{-x})\,dx = 0$

उत्तर-

$$(e^x + e^{-x})\,dy = (e^x - e^{-x})\,dx$$

$$dy = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] dy$$

$$\int dy = \int \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] dx + C$$

$$y = \int \left[\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right] dx + C$$

Let $e^x + e^{-x} = t$

$$\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x}) = \frac{dt}{dx}$$

$$e^x - e^{-x} = \frac{dt}{dx}$$

$$(e^x - e^{-x})\,dx = dt$$

$$y = \int \frac{1}{t}\,dt + C$$

$$y = \log(t) + c$$

$$y = \log(e^x + e^{-x}) + c$$

अत: समीकरण का अभीष्ट हल है।

6. $\frac{dy}{dx} = (1 + x^2)(1 + y^2)$

उत्तर- $\frac{dy}{1 + y^2} = (1 + x^2)\,dx$

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int (1+x^2)\,dx$$

$$\tan^{-1} y = \int dx + \int x^2\,dx$$

$$\tan^{-1} y = x + \frac{x^3}{3} + C$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

7. $y \log y\,dx - x\,dy = 0.$

उत्तर-

$$y \log y\,dx = x\,dy$$

$$\frac{dy}{y \log y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y \log y} = \int \frac{dx}{x}$$

माना $\log y = t$

$$\frac{d}{dy}(\log y) = \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{dt}{dy}$$

$$\frac{1}{y}\,dy = dt$$

$$\int \frac{dt}{t} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\log t = \log x + \log C$$

$$\log(\log y) = \log Cx$$

$$y = e^{Cx}$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

8. $x^5 \frac{dy}{dx} = -y^5$

उत्तर-

$$\frac{dy}{y^5} = -\frac{dx}{x^5}$$

$$\frac{dy}{x^5} + \frac{dx}{y^5} = 0$$

$$\int \frac{dy}{x^5} + \int \frac{dx}{y^5} = k \quad (k = \text{अचर})$$

$$\int x^{-5}\, dy + \int y^{-5}\, dx = k$$

$$\frac{x^{-4}}{-4} + \frac{x^{-4}}{-4} = k$$

$$x^{-4} + y^{-4} = -4k$$

$$x^{-4} + y^{-4} = C \quad (C = -4k)$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

9. $\frac{dy}{dx} = \sin^{-1} x$

उत्तर- $dy = \sin^{-1} x \, dx$

$$\int dy = \int \sin^{-1} x \, dx$$

$$y = \int (\sin^{-1} x \cdot 1) \, dx$$

$$y = \sin^{-1} x \int (1) \, dx - \int \left[\frac{d}{dx} (\sin^{-1} x) \cdot \int (1) \, dx \right] dx$$

$$y = \sin^{-1} x \cdot x - \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot x \right) dx$$

$$y = x \sin^{-1} x - \int \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}} \, dx$$

माना $1 - x^2 = t$

$$\frac{d}{dx} (1 - x^2) = \frac{dt}{dx}$$

$$-2x = \frac{dt}{dx}$$

$$x \, dx = -\frac{1}{2} dt$$

$$y = x \sin^{-1} x + \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt$$

$$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int (t)^{-1/2}\, dt$$

$$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-1/2}}{1/2} + C$$

$$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \sqrt{t} + C.$$

$$y = x \sin^{-1} x + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है।

10. $e^x \tan y\, dx + (1-e^x) \sec^2 y\, dy = 0$

उत्तर- $(1-e^x) \sec^2 y\, dy = -e^x \tan y\, dx$

$$\frac{\sec^2 y}{\tan y}\, dy = \frac{-e^x}{1-e^x}\, dx$$

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y}\, dy = \int \frac{-e^x}{1-e^x}\, dx$$

माना $\tan y = u$

$$\frac{d}{dy}(\tan y) = \frac{du}{dy}$$

$$\sec^2 y = \frac{du}{dy}$$

$$\sec^2 y \, dy = du$$

$$\int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = \int \frac{du}{u} = \log u$$
$$= \log (\tan y)$$

अब, माना $1 - e^x = t$

$$\frac{d}{dx}(1 - e^x) = \frac{dt}{dx}$$

$$-e^x dx = dt$$

$$\int \frac{-e^x}{1 - e^x} dx = \int \frac{dt}{t} = \log t$$
$$= \log (1 - e^x)$$

$$\log (\tan y) = \log (1 - e^x) + \log c$$

$$\log (\tan y) = \log [c (1 - e^x)]$$

$$\tan y = c (1 - e^x)$$

अतः समीकरण का अभीष्ट हल है

11. $(x^3+x^2+x+1)\, dy/dx = 2x^2+x$, $y=1$ यदि $x=0$.

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2+x}{(x^3+x^2+x+1)}$$

$$dy = \frac{2x^2+x}{(x^3+x^2+x+1)}\, dx$$

$$\int dy = \int \frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$$

$$\frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

$$2x^2+x = Ax^2+A+Bx^2+Bx+Cx+C$$

$$2x^2+x = (A+B)x^2+(B+C)x+(A+C)$$

$$A+B=2$$
$$B+C=1$$
$$A+C=0$$

$$A=\frac{1}{2},\ B=\frac{3}{2},\ C=\frac{-1}{2}.$$

$$\frac{2x^2+x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(3x+1)}{(x^2+1)}$$

$$\int dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{(3x+1)}{(x^2+1)}\,dx$$

$$y = \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{2}\int \frac{x}{(x^2+1)}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx$$

$$y = \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{4}\int \frac{2x}{(x^2+1)}\,dx - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$y = \frac{1}{2}\log(x+1) + \frac{3}{4}\log(x^2+1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$y = \frac{1}{4}\left[2\log(x+1) + 3\log(x^2+1)\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1}x + c$$

$$y = \frac{1}{4}\left[(x+1)^2(x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}$$

$\tan^{-1} x + C$

दिया है, $y = 1$ यदि $x = 0$

$$1 = \frac{1}{4}\log(1) - \frac{1}{2}\tan^{-1}(0) + C$$

$$1 = \frac{1}{4} \times 0 - \frac{1}{2} \times 0 + C$$

$$C = 1$$

$$y = \frac{1}{4}\left[(x+1)^2 (x^2+1)^3\right] - \frac{1}{2}\tan^{-1} x + 1.$$

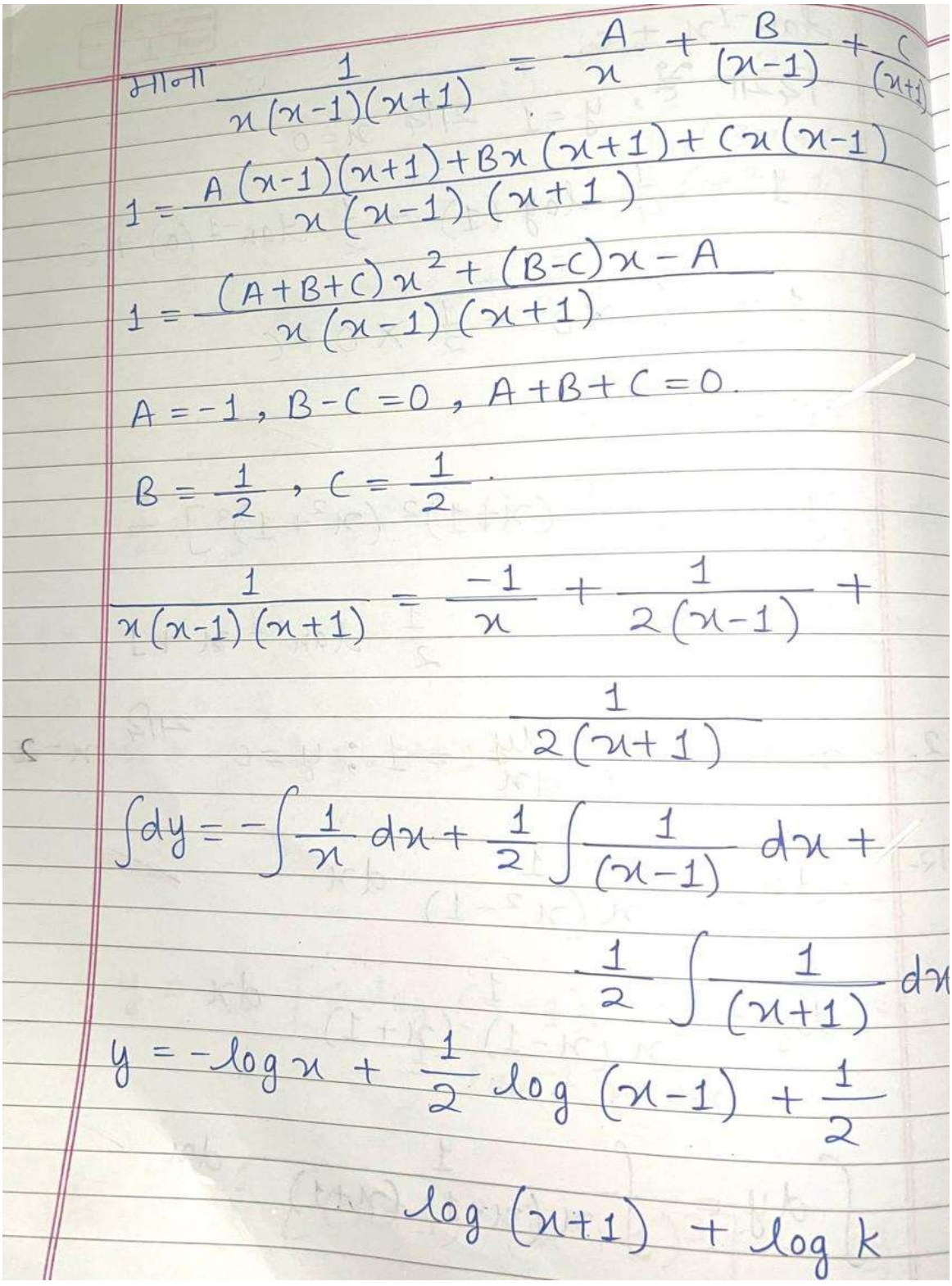
12. $x(x^2-1)\frac{dy}{dx} = 1 ; y = 0$ यदि $x = 2$.

उत्तर-

$$dy = \frac{1}{x(x^2-1)}dx$$

$$dy = \frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)}dx$$



माना $\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+1)}$

$1 = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$

$1 = \frac{(A+B+C)x^2 + (B-C)x - A}{x(x-1)(x+1)}$

$A = -1, \; B - C = 0, \; A + B + C = 0.$

$B = \frac{1}{2}, \; C = \frac{1}{2}.$

$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$

$\int dy = -\int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x-1)} dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+1)} dx$

$y = -\log x + \frac{1}{2}\log(x-1) + \frac{1}{2}\log(x+1) + \log k$

$$y = \frac{1}{2} \log \left[\frac{k^2 (x-1)(x+1)}{x^2} \right]$$

दिया है, $y = 0$ यदि $x = 2$.

$$0 = \frac{1}{2} \log \left[k^2 (2-1)(2+1) / 4 \right]$$

$$\log \left(\frac{3k^2}{4} \right) = 0$$

$$\frac{3k^2}{4} = 1$$

$$k^2 = \frac{4}{3}$$

$$y = \frac{1}{2} \log \left[\frac{4(x-1)(x+1)}{3x^2} \right]$$

$$y = \frac{1}{2} \log \left[\frac{4(x^2-1)}{3x^2} \right]$$

13. $\cos \left(\frac{dy}{dx} \right) = a \; (a \in R)$; $y = 1$ यदि $x = 0$.

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} = \cos^{-1} a$$

$$dy = \cos^{-1} a \; dx$$

$$\int dy = \cos^{-1} a \int dx$$

$$y = \cos^{-1} a\, x + C$$

$$y = x \cos^{-1} a + C$$

दिया है, $y = 1$ यदि $x = 0$,

$$1 = 0 \cdot \cos^{-1} a + C$$

$$C = 1.$$

$$y = x \cdot \cos^{-1} a + 1$$

$$\frac{y-1}{x} = \cos^{-1} a$$

$$a = \cos\left(\frac{y-1}{x}\right).$$

14. $\frac{dy}{dx} = y \tan x$; $y = 1$ यदि $x = 0$.

12-

$$\frac{dy}{y} = \tan x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \tan x\, dx$$

$$\log y = \log(\sec x) + \log C$$

$\log y = \log (C \sec x)$

$y = C \sec x$

दिया है, $y = 1$ यदि $x = 0$.

$1 = C \sec 0$

$C = 1$

$y = \sec x$.

15. बिन्दु $(0, 0)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका अवकल समीकरण $y' = e^x \sin x$ है।

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = e^x \sin x$

$dy = e^x \sin x \, dx$

$\int dy = \int e^x \sin x \, dx$

माना $I = \int e^x \sin x \, dx$

$I = \sin x \int e^x dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sin x) \cdot \int e^x dx\right) dx$

$I = \sin x \cdot e^x - \int \cos x \cdot e^x dx$

$$I = \sin x \cdot e^x - \left[\cos x \cdot \int e^x dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\cos x) \cdot \int e^x dx\right) dx\right]$$

$$I = \sin x \cdot e^x - \left[\cos x \cdot e^x - \int (-\sin) \cdot e^x dx\right]$$

$$I = e^x \sin x - e^x \cos x - I$$

$$2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$I = e^x \frac{(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

$$y = e^x \frac{(\sin x - \cos x)}{2} + C$$

$$0 = e^0 \frac{(\sin 0 - \cos 0)}{2} + C$$

$$0 = 1 \frac{(0-1)}{2} + C$$

$$C = \frac{1}{2}$$

$$y = e^x \frac{(\sin x - \cos x)}{2} + \frac{1}{2}$$

$2y = e^x(\sin x - \cos x) + 1$

$2y - 1 = e^x(\sin x - \cos x)$

अत: अभीष्ट वक्र का समीकरण निम्न है।

16. अवकल समीकरण $xy\frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ के लिए बिन्दु $(1,-1)$ से गुजरने वाला वक्र ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\left(\frac{y}{y+2}\right)dy = \left(\frac{x+2}{x}\right)dx$

$\left(1 - \frac{y}{y+2}\right)dy = \left(1 + \frac{2}{x}\right)dx$

$\int\left(1 - \frac{y}{y+2}\right)dy = \int\left(1 + \frac{2}{x}\right)dx$

$\int dy - 2\int\frac{y}{y+2}dy = \int dx + 2\int\frac{1}{x}dx$

$y - 2\log(y+2) = x + 2\log x + C$

$y - x - C = \log x^2 + \log(y+2)^2$

$y - x - C = \log\left[x^2(y+2)^2\right]$

$-1 - 1 - C = \log\left[(-1)^2(-1+2)^2\right]$

$-2-C = \log 1 = 0$

$C = -2$

$y - x + 2 = \log [x^2 (y+2)^2]$

यही वक्र का अभीष्ट समीकरण है।

17. बिन्दु $(0,-2)$ से गुजरने वाले एक ऐसे वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके किसी बिन्दु (x,y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता और उस बिन्दु के y निर्देशांक का गुणनफल उस बिन्दु के x निर्देशांक के बराबर है।

उत्तर- माना x और y दिए गए वक्र के क्रमशः x-निर्देशांक और y-निर्देशांक हैं।

किसी वक्र की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ होती है।

प्रश्नानुसार, $y \frac{dy}{dx} = x$

$y \cdot dy = x \cdot dx$

$\int y \cdot dy = \int x \cdot dx$

$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$

$y^2 - x^2 = 2C$

$(-2)^2 - 0^2 = 2C$

$2C = 4$

$y^2 - x^2 = 4$

यही वक्र का अभीष्ट समीकरण है।

18. एक वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता, बिन्दु $(-4, -3)$ से मिलाने वाले रेखाखण्ड की प्रवणता की दुगुनी है। यदि यह वक्र बिन्दु $(-2, 1)$ से गुजरता है तो तो इस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- बिन्दुओं (x, y) और $(-4, -3)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $(m_1) = y+3 / x+4$.

किसी वक्र की प्रवणता $(m_2) = dy/dx$ होती है।

प्रश्नानुसार,

$$m_2 = 2m_1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y+3)}{x+4}$$

$$\frac{dy}{y+3} = \frac{2\,dx}{x+4}$$

$$\int \frac{dy}{y+3} = 2\int \frac{dx}{x+4}$$

$$\log(y+3) = 2\log(x+4) + \log c$$

$$\log(y+3) = \log c\,(x+4)^2$$

$$y+3 = c(x+4)^2$$

$$4 = 4c$$

$$c = 1$$

$$y+3 = (x+4)^2$$

यही वक्र का अभीष्ट समीकरण है।

19. एक गोलाकार गुब्बारे का आयतन, जिसे हवा भरकर फुलाया जा रहा है, स्थिर गति से बदल रहा है। यदि आरम्भ में गुब्बारे की त्रिज्या 3 इकाई है और 3 सेकेण्ड बाद 6 इकाई है तो t सेकेण्ड बाद उस गुब्बारे की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- माना, गुब्बारे में भरी हवा के आयतन परिवर्तन की दर K है। (जहाँ K एक अचर है)

$$\frac{dv}{dt} = k$$

गोले का आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = k$$

$$\frac{4}{3}\pi 3r^2 \cdot \frac{dr}{dt} = k$$

$$4\pi r^2 dr = k\,dt$$

$$4\pi \int r^2 dr = k \int dt$$

$$4\pi \frac{r^3}{3} = kt + C$$

$$4\pi r^3 = 3(kt + C) \quad \text{— (1)}$$

दिया है, यदि $t = 0$ तो $r = 3$;

$$4\pi (3)^3 = 3(k \times 0 + C)$$

$$108\pi = 3C$$

$$C = 36\pi$$

और यदि $t = 3$ तो $r = 6$;

$$4\pi \times (6)^3 = 3(k \times 3 + C)$$

$$864\pi = 3(3k + 36\pi)$$

$3k = -288\pi - 36\pi$

$252\pi = 3k$

$k = 84\pi$

k और c का मान समी० 1 में रखने पर:

$4\pi r^3 = 3(84\pi t + 36\pi)$

$4\pi r^3 = 4\pi(63t + 27)$

$r^3 = 63t + 27$

$r = (63t + 27)^{1/3}$

t सेकेण्ड के बाद गुब्बारे की त्रिज्या $(63t + 27)^{1/3}$ हो जाएगी।

20. किसी बैंक में मूलधन की वृद्धि r% वार्षिक की दर से होती है। यदि 100 रुपये 10 वर्षों में दुगुने हो जाते हैं, तो r का मान ज्ञात कीजिए। ($\log_e 2 = 0.6931$).

उत्तर- माना P, t और r क्रमशः मूलधन, समय तथा ब्याज की दर है।

$$\frac{dP}{dt} = \left(\frac{r}{100}\right)P$$

PAGE No. 30
DATE

$$\frac{dP}{P} = \left(\frac{r}{100}\right) dt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \frac{r}{100} \int dt$$

$$\log P = \frac{rt}{100} + k$$

$$P = e^{\frac{rt}{100} + k} \quad \text{— (1)}$$

दिया है : यदि $t = 0$ तो $P = 100$;

$$100 = e^k \quad \text{— (2)}$$

यदि $t = 10$, तो $P = 2 \times 100 = 200$

समी. 1 से,

$$200 = e^{r/10 + k}$$

$$200 = e^{r/10} \cdot e^k$$

$$200 = e^{r/10} \cdot 100 \quad \text{(समी. 2 से)}$$

$$e^{r/10} = 2$$

$$\frac{r}{10} = \log_e 2$$

$\frac{r}{10} = 0.06931$

$r = 6.931$

अतः r का मान 6.93 % है।

23. अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}$ का व्यापक हल है :

(A) $e^x + e^{-y} = C$
(B) $e^x + e^y = C$
(C) $e^{-x} + e^y = C$
(D) $e^{-x} + e^{-y} = C$

उत्तर- दिया है : $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

$\frac{dy}{e^y} = e^x dx$

$e^{-y} = e^x + k$

$e^x + e^y = -k$

$e^x + e^{-y} = C \quad (C = -k)$

अतः विकल्प (A) सही है।

प्रश्नावली - 9.4

समघातीय अवकल समीकरण के लिए,

$$y = vx \quad , \quad v = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

1. $(x^2 + xy)\,dy = (x^2 + y^2)\,dx$

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy}$$

x^2 से भाग देने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)}$$

अत : यह समघातीय अवकल समीकरण है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

समी. 1 का मान रखने पर :-

$$\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+\frac{y}{x}} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{1+v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-v-v^2}{1+v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$\frac{1+v}{1-v}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{1+v}{1-v}\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \left(\frac{2}{1-v} - 1\right) dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{2}{1-v}\,dv - \int 1\,dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-2\log|1-v| - v = \log|x| + \log c$$

$$2\log|1-v| + v = -\log|x| + \log c$$

$$2\log\left(1-\frac{y}{x}\right) + \frac{y}{x} = -\log x + \log c$$

$$\log\left(\frac{x-y}{x}\right)^2 + \log e^{y/x} = -\log x + \log c$$

$$\log(x-y)^2 - \log x^2 + \log e^{y/x} = -\log x + \log c$$

$$\log(x-y)^2 = -\log x + \log c + \log x^2 - \log e^{y/x}$$

$$\log(x-y)^2 = -\log x + \log c + 2\log x - \log e^{y/x}$$

$$\log(x-y)^2 = \log c + \log x - \log e^{y/x}$$

$$\log(x-y)^2 = \log(cx - \log e^{y/x}$$

$$\log(x-y)^2 = \log\left(\frac{cx}{e^{y/x}}\right)$$

$$(x-y)^2 = \frac{cx}{e^{y/x}}$$

$$(x-y)^2 = cx.e^{-y/x}$$

2. $y' = \frac{x+y}{x}$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}$

माना $F(x,y) = \frac{x+y}{x}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x} = \frac{x+y}{x} = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x}$

$v + x\frac{dv}{dx} = 1 + v$

$x\frac{dv}{dx} = 1$

$dv = \frac{dx}{x}$

$v = \log + c$

$\frac{y}{x} = \log x + C$

$y = x \log x + Cx$

3. $(x-y)\,dy - (x+y)\,dx = 0$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$

माना $F(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda x - \lambda y} = \frac{x+y}{x-y} = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है ।

माना $y = vx$

$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x+vx}{x-vx} = \frac{1+v}{1-v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{1-v} - v = \frac{1+v-v(1-v)}{1-v}$

$\frac{dv}{\quad} \quad 1+v^2$

$$\frac{1-v}{(1+v^2)}\,dv = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dx}{x} = \left(\frac{1}{(1+v^2)} - \frac{v}{(1+v^2)}\right)dv$$

$$\tan^{-1}v - \frac{1}{2}\log(1+v^2) = \log x + c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = \log x + c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) = \log x + c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{2}\left[\log(x^2+y^2) - \log x^2\right] = \log x + c$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

4. $(x^2-y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x^2-y^2)}{2xy}$$

माना $F(x,y) = \dfrac{-(x^2-y^2)}{2xy}$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \left[\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{2(\lambda x)(\lambda y)}\right] = \frac{-(x^2 - y^2)}{2xy}$$

$= \lambda^0 F(x, y)$

समीकरण समघातीय है ।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -\left[\frac{x^2 - (vx)^2}{2x(vx)}\right]$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\frac{(1 - v^2)}{2v}$$

$$\frac{2v}{1 - v^2}dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\log(1 - v^2) = -\log x + \log C = \log\frac{C}{x}$$

$$1 - v^2 = \frac{C}{x}$$

$$\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=\frac{C}{x}$$

$$x^2+y^2=Cx$$

5. $x^2\frac{dy}{dx}=x^2-2y^2+xy$

उत्तर- $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-2y^2+xy}{x^2}$

माना $F(x,y)=\frac{x^2-2y^2+xy}{x^2}$

$$F(\lambda x,\lambda y)=\frac{(\lambda x)^2-2(\lambda y)^2+(\lambda x)(\lambda y)}{(\lambda x)^2}$$

$$=\frac{x^2-2y^2+xy}{x^2}=\lambda^0 F(x,y)$$

समीकरण समघातीय है।

माना $y=vx$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=1-2v^2+v$$

$$x\frac{dv}{dx}=1-2v^2$$

$$\frac{dv}{1-2v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{dv}{\frac{1}{2} - v^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{dv}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - v^2}\right] = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\frac{1}{\sqrt{2}}} \log\left|\frac{1/\sqrt{2} + y/x}{1/\sqrt{2} - y/x}\right| = \log|x| + C$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{1/\sqrt{2} + y/x}{1/\sqrt{2} - y/x}\right| = \log|x| + C$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{x + \sqrt{2}y}{x - \sqrt{2}y}\right| = \log|x| + C$$

6. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$

उत्तर- $x\,dy = \left[y + \sqrt{x^2+y^2}\right] dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

माना $F(x,y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}}{\lambda x}$$

$$= \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \lambda^0 (F(x, y))$$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + (vx)^2}}{x}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$

$$\log |v + \sqrt{1+v^2}| = \log |x| + C$$

$$\log |y/x + \sqrt{1 + y^2/x^2}| = \log |x| + C$$

$$\log \left| \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} \right| = \log |x| + C$$

$$y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$$

7. $\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}y\,dx=$

$\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}x\,dy$

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left\{x\cos\left(\frac{y}{x}\right)+y\sin\left(\frac{y}{x}\right)\right\}y}{\left\{y\sin\left(\frac{y}{x}\right)-x\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right\}x}$$

माना $F(x,y)$

$$=\frac{\left\{x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right\}y}{\left\{y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right\}x}$$

$F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^{\circ}F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y=vx$

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{(x\cos v+vx\sin v)\cdot v\cancel{x}}{(vx\sin v-x\cos v)\cdot x}$$

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v\cos v+v^2\sin v}{v\sin v-\cos v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v\cos v + v^2\sin v - v^2\sin v + v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

$$\left[\frac{v\sin v - \cos v}{2v\cos v}\right]dv = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\left(\tan v - \frac{1}{v}\right)dv = \frac{2\,dx}{x}$$

$$\log\left(\frac{\sec v}{v}\right) = \log(cx^2)$$

$$\frac{\sec v}{v} = cx^2$$

$$\sec v = cx^2 v$$

$$\sec\frac{y}{x} = cx^2\frac{y}{x} = cxy$$

$$\cos\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{cxy} = \frac{1}{c}\cdot\frac{1}{xy}$$

$$xy\cos\frac{y}{x} = k \qquad \left[k = \frac{1}{c}\right]$$

8. $$x\frac{dy}{dx} - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

उत्तर- $x\frac{dy}{dx} = y - x\sin\frac{y}{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x\sin y/x}{x}$$

माना $F(x,y) = \frac{y - x\sin y/x}{x}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx - x\sin v}{x}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sin v$$

$$-\frac{dv}{\sin v} = \frac{dx}{x}$$

$$\text{cosec } v\, dv = -dx/x$$

$$\log|\text{cosec } v - \cot v| = -\log x + \log c = \log\frac{c}{x}$$

$$\text{cosec}\left(\frac{y}{x}\right) - \cot\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{C}{x}$$

$$\frac{1}{\sin\frac{y}{x}} - \frac{\cos\frac{y}{x}}{\sin\frac{y}{x}} = \frac{C}{x}$$

$$x\left[1-\cos y/x\right] = C \sin y/x.$$

9. $y\,dx + x \log\left(\frac{y}{x}\right) dy - 2x\,dy = 0$

उत्तर- $y\,dx = \left[2x - x \log\left(y/x\right)\right] dy$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - x\log\left(\frac{y}{x}\right)}$$

माना $F(x,y) = \dfrac{y}{2x - x\log\left(\frac{y}{x}\right)}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\circ} F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx}{2x - x\log v}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2 - \log v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{2 - \log v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v - 2v + v\log v}{2 - \log v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2 - \log v}{v(\log v - 1)}\,dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left[\frac{1 + (1 - \log v)}{v(\log v - 1)}\right]dv$$

$$\frac{dx}{x} = \left[\frac{1}{v(\log v - 1)} - \frac{1}{v}\right]dv$$

$$\int \frac{1}{v(\log v - 1)}\,dv - \int \frac{1}{v}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$\int \frac{1}{v(\log v - 1)}\,dv - \log v = \log x + \log c$$

माना $\log (v - 1) = t$

$$\frac{d}{dv}(\log v - 1) = \frac{dt}{dv}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{dt}{dv}$$

$$\frac{dv}{v} = dt$$

$$\int \frac{dt}{t} - \log v = \log x + \log C$$

$$\log t - \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log(Cx)$$

$$\log\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right] - \log\left(\frac{y}{x}\right) = \log Cx$$

$$\log\left[\frac{\log\left(\frac{y}{x}\right) - 1}{\frac{y}{x}}\right] = \log Cx$$

$$\frac{y}{x}\left[\log\left(\frac{y}{x}\right) - 1\right] = Cx$$

$$\log\frac{y}{x} - 1 = Cy$$

10. $(1 + e^{x/y})\,dx + e^{x/y}(1 - x/y)\,dy = 0$

उत्तर-

$$(1 + e^{x/y})\,dx = -e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{x/y}(1 - x/y)}{(1 + e^{x/y})}$$

माना $F(x,y) = \dfrac{-e^{x/y}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{\left(1+e^{x/y}\right)}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v(1-v)}{(1+e^v)}$$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v + ve^v}{1+e^v} - v$$

$$y\frac{dv}{dy} = \frac{-e^v + ve^v - v - ve^v}{1+e^v}$$

$$y\frac{dv}{dy} = -\left[\frac{v-e^v}{1+e^v}\right]$$

$$\left[\frac{v-e^v}{1+e^v}\right]dv = -\frac{dy}{y}$$

$$\log(v+e^v) = -\log y + \log c$$

$$\log\left(\frac{c}{y}\right) = \left[\frac{x}{y} + e^{x/y}\right] = \frac{c}{y}$$

$x + ye^{x/y} = C$

11. $(x+y)\,dy + (x-y)\,dx = 0$; $y=1, x=1$

उत्तर- $(x+y)\,dy = -(x-y)\,dx$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x-y)}{x+y}$$

माना $F(x,y) = \dfrac{-(x-y)}{x+y}$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-(x-vx)}{x+vx} = \frac{v-1}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = \frac{v-1-v(v+1)}{v+1}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1-v^2-v}{v+1} = -\frac{(1+v^2)}{v+1}$$

$$\frac{(v+1)}{1+v^2}\,dv = \frac{-dx}{x}$$

$$\left[\frac{v}{1+v^2}+\frac{1}{1+v^2}\right]dv=\frac{-dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}\log(1+v^2)+\tan^{-1}v=-\log x+k$$

$$\log(1+v^2)+2\tan^{-1}v=-2\log x+2k$$

$$\log\left[(1+v^2)\cdot x^2\right]+2\tan^{-1}v=2k$$

$$\log\left[1+\frac{y^2}{x^2}\cdot x^2\right]+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=2k$$

$$\log(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=2k$$

$$\log 2+2\tan^{-1}=2k$$

$$\log 2+2\times\frac{\pi}{4}=2k$$

$$\frac{\pi}{2}+\log 2=2k$$

$$\log(x^2+y^2)+2\tan^{-1}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}+\log 2$$

2. $x^2dy+(xy+y^2)dx=0,\ y=1,\ x=1$

R-

$$x^2dy=-(xy+y^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(xy+y^2)}{x^2}$$

माना $F(x,y) = -(xy+y^2)/x^2$

$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 F(x,y)$

समीकरण समघातीय है।

माना $y = vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{[x \cdot vx + (vx)^2]}{x^2} = -v - v^2$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v^2 - 2v = -v(v+2)$$

$$\frac{dv}{v(v+2)} = -\frac{dx}{x}$$

$$-\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\left[\frac{(v-2)-v}{v(v+2)}\right]dv$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right]dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{2}[\log v - \log(v+2)] = -\log x + \log c$$

$$\frac{1}{2}[\log v - \log(v+2) = -\log x + \log c$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{v}{v+2}\right)=\log\frac{c}{x}\Rightarrow\frac{v}{v+2}=\frac{c^2}{x^2}$$

$$\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}+2x}=\frac{c^2}{x^2}\Rightarrow\frac{x^2y}{y+2x}=c^2$$

$$\frac{1}{1+2}=c^2=\frac{1}{3}$$

$$\frac{x^2y}{y+2x}=\frac{1}{3}\Rightarrow y+2x=3x^2y.$$

13. $\left[x\sin^2(y/x)-y\right]dx+x\,dy=0$

$y=\pi/4,\ x=1.$

उत्तर- $\frac{dy}{dx}=\frac{\left[x\sin^2 y/x-y\right]}{x}$

माना $F(x,y)=\frac{-(x-y)}{x+y}$

$$F(\lambda x,\lambda y)=\left[\lambda x\sin^2(\lambda\cdot\lambda y/x)-\lambda y\right]/\lambda x$$

$$=\frac{\left[x\sin^2 y/x-y\right]}{x}=\lambda^0(F(x,y))$$

माना $y=vx$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-[x\sin^2 v - vx]}{x}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = -[\sin^2 v - v] = v - \sin^2 v$$

$$x\frac{dv}{dx} = -\sin^2 v$$

$$\frac{dv}{\sin^2 v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\operatorname{cosec}^2 v\, dv = -dx/x$$

$$-\cot v = -\log|x| - C$$

$$\cot v = \log|x| + C$$

$$\cot\frac{y}{x} = \log|x| + C$$

$$\cot\frac{y}{x} = \log Cx$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{4}\right) = \log|C|$$

$$1 = \log C$$

$C = e^1 = e$

$C = e$

$\cot \frac{y}{x} = \log |ex|$

16. $\frac{dy}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$ के रूप वाले समघातीय अवकल समीकरण को हल करने के लिए निम्न में कौन-सा प्रतिस्थापन किया जाता है :

(A) $y = vx$
(B) $v = yx$
(C) $x = vy$
(D) $x = v$

उत्तर- $\frac{dx}{dy} = h\left(\frac{x}{y}\right)$

$x = vy$

अत: विकल्प (c) सही है।

17. निम्न में कौन-सा समघातीय अवकल समीकरण है?

(A) $(4x + 6y + 5)dy - (3y + 2x + 4)dx = 0$

(B) $(xy)\,dx-(x^3+y^3)\,dy=0$
(C) $(x^3+2y^2)\,dx+2xy\,dy=0$
(D) $y^2dx+(x^2-xy-y^2)\,dy=0$

उत्तर- फलन $F(x,y)$ समघातीय अवकलन समी. होगा यदि $F(\lambda x,\lambda y)=\lambda^n F(x,y)$

विकल्प D में,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2}{(x^2-xy-y^2)}$$

माना $F(x,y)=-y^2/(x^2-xy-y^2)$

$F(\lambda x,\lambda y)$:-

$$=\frac{-(\lambda y)^2}{(\lambda y)^2-(\lambda x)(\lambda y)-(\lambda x)^2}=\frac{\lambda^2y^2}{\lambda^2(y^2+xy-x^2)}$$

$$=\lambda^0\left(\frac{y^2}{y^2+xy-x^2}\right)=\lambda^0F(x,y)$$

अतः विकल्प (D) सही है।

1. उत्तर

रेखीय अवकलन समीकरण :-

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

P और Q नियतांक हैं।

समाकलन गुणांक (Integrating Factor) :-

$$IF = e^{\int P dx}$$

हल : $y.I.F = \int (Q.IF)\,dx + c.$

प्रश्नावली 9.5

निम्न अवकल समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

1. $\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$

उत्तर- $P = 2,\ Q = \sin x$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

$$y.IF = \int (Q.IF)\,dx + c$$

$$ye^{2x} = \int (\sin x . e^{2x})\,dx + c$$

माना: $I = \int \sin x . e^{2x}$

$$I = \sin x \int e^{2x} dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\sin x) . \int e^{2x} dx \right) dx$$

$$I = \sin x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \left(\cos x \cdot \frac{e^{2x}}{2}\right) dx$$

$$I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos x \int e^{2x}\,dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\cos x) \cdot \int e^{2x}\,dx\right) dx\right]$$

$$I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{1}{2}\left[\cos x \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \left[(-\sin x) \cdot \frac{e^{2x}}{2}\right] dx\right]$$

$$I = \frac{e^{2x}\sin x}{2} - \frac{e^{2x}\cos x}{4} - \frac{1}{4}\int (\sin x \cdot e^{2x})\,dx$$

$$I = \frac{e^{2x}}{4}(2\sin x - \cos x) - \frac{1}{4} I$$

$$\frac{5}{4} I = \frac{e^{2x}}{4}(2\sin x - \cos x)$$

$$I = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x)$$

$$y e^{2x} = \frac{e^{2x}}{5}(2\sin x - \cos x) + C$$

$$y = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x) + C e^{-2x}$$

2. $\frac{dy}{dx} + 3y = e^{-2x}$.

उत्तर- $P = 2$, $Q = e^{-2x}$.

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int 3 dx} = e^{3x}$.

$y.IF = \int (Q.IF)\, dx + C$

$ye^{3x} = \int (e^{-2x} . e^{3x}) + C$

$ye^{3x} = \int e^{x} + C$

$y = e^{-2x} + Ce^{-3x}$.

3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$.

उत्तर- $P = \frac{1}{x}$, $Q = x^2$.

$y.IF = \int (Q.IF)\, dx + C$

$y(x) = \int (x^2 . x)\, dx + C$

$yx = \int (x^3)\, dx + C$

$xy = \frac{x^4}{4} + C$

4. $\frac{dy}{dx} + (\sec x)\, y = \tan x \quad \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

उत्तर- $P = \sec x, \; Q = \tan x$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \sec x\, dx} = e^{\log|\sec x + \tan x|}$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$

$y(\sec x + \tan x) = \int \tan x (\sec + \tan x)\, dx + C$

$y(\sec x + \tan x) = \int \sec x + \tan x\, dx + \int \tan^2 x\, dx + C$

$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \int (\sec^2 x - 1)\, dx + C$

$y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x + C.$

5. $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x \quad \left(0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} + y \sec^2 x = \tan x \sec^2 x$

$P = \sec^2 x, \; Q = \tan x \sec^2 x$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \sec^2 x\, dx} = e^{\tan x}.$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$

$y e^{\tan x} = \int (\tan x \sec^2 x\, e^{\tan x})\, dx + C$

माना $\tan x = t$

$\sec^2 x\, dx = dt$

$y e^t = \int t e^t\, dt + C$

$y e^t = t \cdot e^t - \int e^t\, dt + C$

$y e^t = t \cdot e^t + e^t + C$

$y e^{\tan x} = \tan x \cdot e^{\tan x} - e^{\tan x} + C$

$y = \tan x + 1 + C e^{-\tan x}$

6. $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$

उत्तर- $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x \log x$

$P = \frac{2}{x}$, $Q = x \log x$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{\log x^2} = x^2$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$

$y(x^2) = \int (x \log x \cdot x^2)\, dx + C$

$$x^2y = \int (x^3 \log x)\, dx + c$$

$$x^2y = \log x \int x^3\, dx - \int \left(\frac{d}{dx}(\log x) \cdot \int x^3\, dx\right) dx + c$$

$$x^2y = \log x \cdot \frac{x^4}{4} - \int \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x^4}{4}\right) dx + c$$

$$x^2y = \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3\, dx + c$$

$$x^2y = \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + c$$

$$x^2y = \frac{x^4}{16}(4 \log x - 1) + c$$

$$y = \frac{x^2}{16}(4 \log x - 1) + cx^{-2}$$

7. $x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$

उत्तर-

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x \log x} = \frac{2}{x^2}$$

$$P = \frac{1}{x \log x}, \quad Q = \frac{2}{x^2}$$

$$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x \log x} dx} = e^{\log(\log x)}$$

$$IF = \log x$$

$$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$$

$$y \log x = \int \left(\frac{2}{x^2} \log x\right) dx + C$$

$$\int \left(\frac{2}{x^2} \log x\right) dx = 2 \int \left(\log x \cdot \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$2\left[\log x \cdot \int \frac{1}{x^2} dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(\log x) \int \frac{1}{x^2} dx\right\} dx\right]$$

$$2\left[\log x \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left\{\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x}\right)\right\} dx\right]$$

$$2\left[-\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx\right] = 2\left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x}\right]$$

$$= -\frac{2}{x}(1 + \log x)$$

$$y \log x = -\frac{2}{x}(1 + \log x) + C$$

8. $(1 + x^2)\, dy + 2xy\, dx = \cot x\, dx \quad (x \neq 0)$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 + x^2} = \frac{\cot x}{1 + x^2}$$

$P = \frac{2x}{1+x^2}$, $Q = \frac{\cot x}{1+x^2}$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\log(1+x^2)}$

$IF = 1+x^2$

$y.IF = \int (Q.IF)\, dx + C$

$y(1+x^2) = \int \left[\frac{\cot x}{1+x^2}(1+x)^2\right] dx + C$

$y(1+x^2) = \int \cot x\, dx + C$

$y(1+x^2) = \log|\sin x| + C$

9. $x\frac{dy}{dx} + y - x + xy\cot x = 0 \quad (x \neq 0)$

उत्तर.

$x\frac{dy}{dx} + y(1 + x\cot x) = x$

$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x} + \cot x\right) y = 1$

$P = \frac{1}{x} + \cot x$, $Q = 1$.

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (\frac{1}{x} + \cot x) dx}$

$IF = e^{\log x + \log(\sin x)} = e^{\log(x \sin x)} = x \sin x$

$$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\,dx + C$$

$$y(x\sin x) = \int (1 \times x\sin x)\,dx + C$$

$$y(x\sin x) = \int x\sin x\,dx + C$$

$$y(x\sin x) = x\int \sin x\,dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(x)\int \sin x\,dx\right\}dx + C$$

$$y(x\sin x) = x(-\cos x) - \int 1.(-\cos x)\,dx + C$$

$$y(x\sin x) = -x\cos x + \sin x + C$$

$$y = \frac{-x\cos x}{x\sin x} + \frac{\sin x}{x\sin x} + \frac{C}{x\sin x}$$

$$y = -\cot x + \frac{1}{x} + \frac{C}{x\sin x}.$$

10. $(x+y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

उत्तर- $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{dx}{dy} = x+y$$

$$\frac{dx}{dy} - x = y$$

$P = -1, Q = y$

$$IF = e^{\int P\,dy} = e^{\int -dy} = e^{-y}$$

$$x(IF) = \int (Q \cdot IF)\,dy + C$$

$$xe^{-y} = \int (y \cdot e^{-y})\,dy + C$$

$$xe^{-y} = y\int e^{-y}\,dy - \int \left\{\frac{d}{dy}(y)\int e^{-y}\,dy\right\} dy + C$$

$$xe^{-y} = y(e^{-y}) - \int (-e^{-y})\,dy + C$$

$$xe^{-y} = -ye^{-y} - e^{-y} + C$$

$$x = -y - 1 + Ce^{y}$$

$$x + y + 1 = Ce^{y}$$

11. $y\,dx + (x - y^2)\,dy = 0$

उत्तर-

$$y\,dx = (y^2 - x)\,dy$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y^2 - x}{y} = y - \frac{x}{y}$$

$$\frac{dx}{dy} + \frac{x}{y} = y$$

$P = \frac{1}{y}$, $Q = y$.

$IF = e^{\int P\,dy} = e^{\int \frac{1}{y}\,dy} = e^{\log y} = y$.

$x \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\,dy + C$

$xy = \int (y \cdot y)\,dy + C$

$xy = \int y^2\,dy + C$

$xy = \frac{y^3}{3} + C$

$x = \frac{y^3}{3} + \frac{C}{x}$.

12. $(x + 3y^2)\frac{dy}{dx} = y \quad (y > 0)$.

उत्तर- $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(x + 3y^2)}$

$\frac{dx}{dy} = \frac{x + 3y^2}{y} = \frac{x}{y} + 3y$

$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 3y$

$P = -\frac{1}{y}$, $Q = 3y$

$IF = e^{\int P\,dy} = e^{-\int \frac{-1}{y}\,dy} = e^{\log y}$

$IF = e^{\log\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{y}$.

$x \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\,dy + C$

$x\left(\frac{1}{y}\right) = \int \left(3y\left(\frac{1}{y}\right)\right) dy + C$

$\frac{x}{y} = 3y + C$

$x = 3y^2 + C$.

13. $\frac{dy}{dx} + 2y \tan x = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

उत्तर. $\frac{dx}{dy} + 2y \tan x = \sin x$

$P = 2\tan x$, $Q = \sin x$

$IF = e^{\int P\,dx} = e^{\int 2\tan x\,dx}$

$IF = e^{2\log|\sec x|} = e^{\log(\sec^2 x)} = \sec^2 x$.

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\,dx + C$

$y(\sec^2 x) = \int (\sin x \cdot \sec^2 x)\,dx + C$

$y \sec^2 x = \int (\sec x \cdot \tan x)\,dx + C$

$y \sec^2 x = \sec x + C$

$0 \times \sec^2 \frac{\pi}{3} = \sec \frac{\pi}{3} + C$

$0 = 2 + C$

$C = -2$

$y \sec^2 x = \sec x - 2$

$y = \cos x - 2 \sec^2 x$

14. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = \frac{1}{1+x^2}$,

$y = 0, x = 1$.

उत्तर- $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$P = \frac{2x}{1+x^2}$, $Q = \frac{1}{(1+x^2)^2}$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int \frac{2x}{1+x^2} dx} = e^{\log|1+x^2|}$

$IF = 1+x^2$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$

$y(1+x^2) = \int \left[\frac{1}{(1+x^2)^2} \cdot (1+x^2)\right] dx + C$

$y(1+x^2) = \int \frac{1}{(1+x^2)} dx + C$

$y \not{x}(1+x^2) = \tan^{-1} 1 + C$

$0 = \tan^{-1} 1 + C$

$C = \frac{\pi}{4}$

$y(1+x^2) = \tan^{-1} - \frac{\pi}{4}$.

15. $\frac{dy}{dx} - 3y \cot x = \sin 2x$; $y = 2, x = \frac{\pi}{2}$

उत्तर- $P = -3 \cot x$, $Q = \sin 2x$.

$IF = e^{\int P dx} = e^{-3\int \cot x\, dx} = e^{-3 \log |\sin x|}$

$IF = e^{\log\left(\frac{1}{\sin^3 x}\right)} = \frac{1}{\sin^3 x}$

$y . IF = \int (Q . IF)\, dx + C$

$y . \frac{1}{\sin^3 x} = \int \left[\sin 2x . \frac{1}{\sin^3 x}\right] dx + C$

$y \operatorname{cosec}^3 x = 2 \int (\cot x . \operatorname{cosec} x)\, dx + C$

$y \operatorname{cosec}^3 x = -2 \operatorname{cosec} x + C$

$y = -\frac{2}{\operatorname{cosec}^2 x} + \frac{3}{\operatorname{cosec}^3 x}$

$y = -2\sin^2 x + C\sin^3 x$

$2 = -2 + C$

$C = 4$

$y = -2\sin^2 x + 4\sin^3 x$

$y = 4\sin^3 x - 2\sin^2 x.$

16. मूल बिंदु से गुजरने वाले एक वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिन्दु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता उस बिन्दु के निर्देशांकों के योग की बराबर है।

उत्तर- माना $F(x, y)$ कोई वक्र है जो मूल बिन्दु से गुजरता है।

बिन्दु (x, y) पर वक्र की प्रवणता $= \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = x + y$, $\frac{dy}{dx} - y = x$

$P = -1, Q = x$

$IF = e^{\int P\,dx} = e^{\int (-1)\,dx} = e^{-x}.$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\,dx + C$

$ye^{-x} = \int xe^{-x}\,dx + C$

$$\int xe^{-x}\,dx = x\int e^{-x}\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}(x)\int e^{-x}\,dx\right\}dx$$

$$-xe^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -xe^{-x} + (-e^{-x})$$

$$= -e^{-x}(x+1)$$

$$y\,e^{-x} = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$y = -(x+1) + Ce^{x}$$

$$x + y + 1 = Ce^{x}$$

$$0 + 0 + 1 = Ce^{0}$$

$$C = 1.$$

$$x + y + 1 = e^{x}$$

17. बिन्दु (0,2) से गुजरने वाले वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए यदि इस वक्र के किसी बिंदु के निर्देशांकों का योग उस बिन्दु पर खिंची गई स्पर्श रेखा की प्रवणता के परिमाप से 5 अधिक है।

उत्तर- माना $F(x,y)$ वक्र पर बिंदु (x,y) है।

प्रवणता $= \frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx} + 5 = x + y$

$\frac{dy}{dx} - y = x - 5$

$P = -1, \quad Q = x - 5.$

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (-1) dx} = e^{-x}.$

$y \cdot IF = \int (Q \cdot IF)\, dx + C$

$y(e^{-x}) = \int (x-5)\, e^{-x}\, dx + C$

$\int (x-5)\, e^{-x}\, dx = (x-5) \int e^{-x}\, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x-5) \cdot \int e^{-x} dx \right\} dx$

$(x-5)(e^{-x}) - \int (-e^{-x})\, dx$

$(5-x)\, e^{-x} + (e^{-x}) = (4-x)\, e^{-x}$

$y\, e^{-x} = (4-x) e^{-x} + C$

$y = (4-x) + Ce^{x}$

$x + y - 4 = Ce^{x}$

$0 + 2 - 4 = Ce^{0}$

$-2 = C$

$C = -2$.

$x + y - 4 = -2e^x$

$y = 4 - x - 2e^x$.

18. अवकल समीकरण $x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2$ का समाकलन गुणक है:

(A) e^{-x}
(B) e^{-y}
(C) $\frac{1}{x}$
(D) x

उत्तर- $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 2x$

$P = \frac{-1}{x}$, $Q = 2x$.

$IF = e^{\int P dx} = e^{\int (-\frac{1}{x}) dx} = e^{-\log x}$

$IF = e^{\log (x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$.

अतः विकल्प (C) सही है।

19. अवकल समीकरण $(1 - y^2)\frac{dx}{dy} + yx = ay$ $(-1 < y < 1)$ का समाकलन गुणक है:

(A) $\frac{1}{y^2-1}$

(B) $\frac{1}{\sqrt{y^2-1}}$

(C) $\frac{1}{1-y^2}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

उत्तर- $\frac{dx}{dy} + \frac{yx}{1-y^2} = \frac{ay}{1-y^2}$

$P = \frac{y}{1-y^2}$, $Q = \frac{ay}{1-y^2}$

$IF = e^{\int P\,dy}$

$= e^{\int \left(\frac{y}{1-y^2}\right) dx}$ $= e^{-\frac{1}{2}\log(1-y^2)}$

$= e^{\log\left|\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right|}$ $= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

अतः विकल्प (D) सही है।