# अध्याय - 5: सांतत्य तथा अवकलनीयता

> Polynomial and modulus functions are always continuous function.

> $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$

> If L.H.L. = R.H.L., so it is continuous function.

> If L.H.L. ≠ R.H.L., so it is discontinuous function.

> $|x| = \begin{cases} -x, & \text{if } x < 0 \\ x, & \text{if } x > 0 \end{cases}$

## प्रश्नावली - 5.1

प्रश्न-1: सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = 5x - 3$, $x = 0$, $x = -3$ तथा $x = 5$ पर संतत है।

उत्तर- (i) $x = 0$ पर,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (5x - 3) = 5(0) - 3$$
$$= -3.$$

$\therefore$ $x = 0$ पर $f$ संतत है।

(ii) $x = -3$ पर,

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} (5x-3) = 5(-3)-3$$
$$= -15-3$$
$$= -18.$$

$\therefore$ $x = -3$ पर $f$ संतत है।

(iii) $x = 5$ पर,

$$\lim_{x \to 5} f(x) = \lim_{x \to 5} (5x-3) = 5(5)-3$$
$$= 22.$$

$\therefore$ $x = 5$ पर $f$ संतत है।

प्रश्न-2: $x = 3$ पर फलन $f(x) = 2x^2 - 1$ के सांतत्य की जाँच कीजिए।

उत्तर- $x = 3$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} 2(3)^2 - 1$

$= 2 \times 9 - 1 = 18 - 1 = 17.$

RHL :- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2(3)^2 - 1$

$= 2 \times 9 - 1 = 18 - 1 = 17.$

$\therefore$ $x = 3$ पर $f$ संतत है।

प्रश्न-3: निम्नलिखित फलनों के सांतत्य की जाँच कीजिए।

(a) $f(x) = x - 5$

उत्तर- माना $x = c$,

$f(x) = c - 5$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} (x-5) = c-5$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} (x-5) = c-5$

$LHL = RHL = f(x)$

अतः यह फलन संतत है।

(b) $f(x) = 1/x-5$, $x \neq 5$

उत्तर- माना $x = c$,

$f(x) = 1/c-5$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} \left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{1}{c-5}$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} \left(\frac{1}{x-5}\right) = \frac{1}{c-5}$

$LHL = RHL = f(x)$

अतः फलन संतत है।

(c) $f(x) = x^2 - 25 / x + 5.$

उत्तर- माना $x = c.$

$$f(x) = \frac{c^2 - 25}{c + 5}$$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} \left[ \frac{x^2 - 25}{x + 5} \right] = \frac{c^2 - 25}{c + 5}$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} \left[ \frac{x^2 - 25}{x + 5} \right] = \frac{c^2 - 25}{c + 5}$

$LHL = RHL = f(x)$

अतः फलन संतत है।

(d) $f(x) = |x - 5|.$

उत्तर- माना : $x = c$

$f(x) = |c - 5|$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} |x - 5| = |c - 5|$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} |x - 5| = |c - 5|$

$LHL = RHL = f(x)$

अतः फलन संतत है।

प्रश्न-4: सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = x^n$, $x = n$ पर संतत है, जहाँ $n$ एक धन पूर्णांक है।

उत्तर- यहाँ $f(x) = x^n$ एक बहुपदीय फलन है संतत है, यदि $x \in R$ और $x \in N$ यहाँ $x = n$ एक पूर्णांक है।

अतः $f(x) = x^n$ संतत फलन है।

प्रश्न-5: क्या $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $f$, $x = 0$, $x = 1$ तथा $x = 2$ पर संतत है।

उत्तर- यहाँ $f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \leq 1 \\ 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$

(i) $x = 0$ पर, $f(x) = x$

LHL :- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x) = 0.$

RHL :- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x) = 0$

$LHL = RHL$

$\therefore$ $f(x) = x$ एक संतत फलन है।

(ii) $x = 1$ पर, $f(x) = x$, $x \leq 1$ के लिए,
$f(x) = 5$, $x > 1$ के लिए,

LHL :- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x) = 1.$

RHL :- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (5) = 5.$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$ बिन्दु $x = 1$ पर संतत नहीं है।

(iii) $x = 2$ पर, $f(x) = 5$, $x > 1$ के लिए

LHL :- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (5) = 5.$

RHL :- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (5) = 5$

$$LHL = RHL$$

अतः $f$, $x = 2$ पर संतत फलन है।

प्रश्न-6 : $f$ के सभी असांतत्य के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए, जबकि $f$ निम्न प्रकार से परिभाषित है -

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{यदि } x \leq 2 \\ 2x-3, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 2$ पर,

(i) जब $x \leq 2$ है, तो $f(x) = 2x+3$

LHL :- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (2x+3)$

$= 2(2)+3 = 7.$

(ii) जब $x > 2$ है, तो $f(x) = 2x-3$

RHL :- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x-3)$

$= 2(2)-3 = 1.$

$LHL \neq RHL$

अत: $x = 2$ पर $f$ असंतत है।

प्रश्न-7 :
$$f(x) = \begin{cases} |x|+3, & \text{यदि } x \leq -3 \\ -2x, & \text{यदि } -3 < x < 3 \\ 6x+2, & \text{यदि } x \geq 3 \end{cases}$$

उत्तर- (i) $x = -3$ पर, $f(x) = |x|+3$, यदि $x \leq -3$

LHL :- $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^-} |x|+3$

$= 3+3 = 6.$

जब $x > -3$, तब $f(x) = -2x$

R.H.L. :- $\lim_{x \to -3^+} f(x) = \lim_{x \to -3^+} (-2x)$

$= -2(-3) = 6.$

जब $x = -3$,

$f(x) = |x| + 3$

$f(-3) = |-3| + 3 = 6.$

इस प्रकार, $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to -3^+}$

$f(x) = f(-3)$

$LHL = RHL = f(-3)$

अतः $x = -3$ पर $f$ संतत फलन है।

(ii) $x = 3$ पर, जब $x < 3$, $f(x) = -2x$

LHL :- $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (-2x) = -6.$

जब $x > 3$, $f(x) = 6x + 2$

RHL :- $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (6x+2) =$

$6(3)+2=20.$

$$f(3) = 6\times 3+2=20$$

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

अतः $x=3$ पर $f$ असंतत है।

प्रश्न-8 :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{यदि } x \neq 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0. \end{cases}$$

उत्तर- (i) $x=0$ पर, जब $x<0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$

LHL :- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{|x|}{x}\right)$

$= -1.$

$[\because |x| = -x, x<0]$

(ii) जब $x>0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $|x| = x$

RHL :- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{|x|}{x}\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

अतः $x = 0$ पर $f$ संतत नहीं है।

प्रश्न-9:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{यदि } x < 0 \\ -1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर- (i) $x = 0$ पर, जब $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$[\because |x| = -x$ जब $x < 0]$

LHL :- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left[\frac{x}{|x|}\right] = -1.$

(ii) जब, $x > 0$, $f(x) = -1.$

RHL :- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -1.$

$\therefore \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(x)$

अतः $x = 0$ पर $f$ संतत है।

प्रश्न-10:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{यदि } x \geq 1 \\ x^2+1, & \text{यदि } x < 1 \end{cases}$$

उत्तर- (i) $x = 1$ पर, $f(x) = x^2+1$ जब $x < 1$

LHL :- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2+1)$

$= 1+1 = 2.$

(ii) $f(x) = x+1$ जब $x \geq 1$

RHL :- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x+1)$

$= 1+1 = 2.$

जब $x = 1$ पर, $f(x) = x+1 = 1+1 = 2.$

$\therefore \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$

अतः $x = 1$ पर $f$ संतत है।

प्रश्न-11 :

$$f(x) = \begin{cases} x^3-3, & \text{यदि } x \leq 2 \\ x^2+1, & \text{यदि } x > 2 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 2$ पर,

LHL :- यदि $x \leq 2$ हो तब $f(x) = x^3-3$

$\lim_{x \to 2^-} x^3-3 = \lim_{x \to 2} (2)^3-3 = 8-3$
$= 5.$

RHL :- यदि $x > 2$ हो तब $f(x) = x^2 + 1$

$$\lim_{x \to 2^+} x^2 + 1 = \lim_{x \to 2^+} (2)^2 + 1 = 4 + 1 = 5.$$

$$LHL = RHL$$

अतः $f$ संतत है।

प्रश्न-12:

$$f(x) = \begin{cases} x^{10} - 1, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 1$ पर,

LHL :- यदि $x \leq 1$ हो तब $f(x) = x^{10} - 1$

$$\lim_{x \to 1^-} x^{10} - 1 = \lim_{x \to 1^-} (1)^{10} - 1 = 1 - 1 = 0.$$

RHL :- यदि $x > 1$ हो तब $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 = \lim_{x \to 1^+} (1)^2 = 1$$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$ असंतत है।

प्रश्न-13 : क्या $f(x) = \begin{cases} x + 5, & \text{यदि } x \leq 1 \\ x - 5, & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$ द्वारा

परिभाषित फलन एक संतत फलन है?

उत्तर- $x = 1$ पर,

LHL :- यदि $x \leq 1$ हो तब $f(x) = x+5$

$$\lim_{x \to 1^-} x+5 = \lim_{x \to 1^-} (1)+5 = 1+5 = 6$$

RHL :- यदि $x > 1$ हो तब $f(x) = x-5$

$$\lim_{x \to 1^+} x-5 = \lim_{x \to 1^+} (1)-5 = 1-5 = -4$$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$ असंतत है।

- फलन $f$ के सांतत्य पर विचार कीजिए, जहाँ $f$ निम्नलिखित द्वारा परिभाषित है।

प्रश्न-14 :

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4, & 1 < x < 3 \\ 5, & 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 1$ पर,

LHL :- यदि $1 \geq x$ हो, तब, $f(x) = 3$

$$\lim_{x \to 1^-} 3 = 3.$$

R.H.L :- यदि $1 < x$ हो, तब $f(x) = 4$

$$\lim_{x \to 1^+} 4 = 4$$

$$LHL \neq RHL$$

$x = 3$ पर,

LHL :- यदि $x < 3$ हो तब $f(x) = 4$

$$\lim_{x \to 3^-} 4 = 4.$$

RHL :- यदि $x \geq 3$ हो तब $f(x) = 5$

$$\lim_{x \to 3^+} 5 = 5.$$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$, $x = 1$ व $x = 3$ पर असंतत है।

प्रश्न-15 :

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x, & x > 1 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 0$ पर,

LHL :- यदि $x < 0$ हो, तब $f(x) = 2x$

$$\lim_{x \to 0^-} 2x = \lim_{x \to 0^-} 2(0) = 0$$

RHL :- यदि $x \geq 0$ हो, तब $f(x) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} 0 = 0$$

$$LHL = RHL$$

अतः $f$, $x = 0$ पर संतत है।

$x = 1$ पर,

LHL :- यदि $x \leq 1$ हो, तब $f(x) = 0$.

$$\lim_{x \to 1^-} 0 = 0$$

RHL :- यदि $x > 1$ हो, तब $f(x) = 4x$.

$$\lim_{x \to 1^+} 4(x) = \lim_{x \to 1^+} 4(1) = 4.$$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$, $x = 1$ पर असंतत है।

न-16 :-

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ 2x, & -1 < x \leq 1 \\ 2, & x > 1 \end{cases}$$

उत्तर- $x = -1$ पर,

LHL :- यदि $x \leq -1$ हो तब $f(x) = -2$.

$$\lim_{x \to -1^-} (-2) = -2.$$

RHL :- यदि $x > -1$ हो तब $f(x) = 2x$

$$\lim_{x \to -1^+} (2x) = 2(-1) = -2.$$

LHL = RHL

अतः $f$, $x = -1$ पर संतत है।

$x = 1$ पर,

LHL :- यदि $x \leq 1$ हो तब $f(x) = 2x$

$$\lim_{x \to 1^-} 2(x) = 2(1) = 2.$$

RHL :- यदि $x > 1$ हो तब $f(x) = 2$.

$$\lim_{x \to 1^+} (2) = 2.$$

LHL = RHL

अतः $f$, $x = 1$ पर संतत है।

प्रश्न-17: a और b के उन मानों को ज्ञात कीजिए जिनके लिए

$$f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{यदि } x \le 3 \\ bx+3, & \text{यदि } x > 3 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x=3$ पर संतत है।

उत्तर-

$$ax+1 \quad \text{—} \quad (i)$$
$$bx+3 \quad \text{—} \quad (ii)$$

समी. (i) = समी. (ii)

$$ax+1 = bx+3 \quad \text{—} \quad (iii)$$

$x$ का मान समी. (iii) में रखने पर:-

$$a(3)+1 = b(3)+3$$
$$3a+1 = 3b+3$$
$$3a = 3b+3-1$$
$$3a = 3b+2$$
$$a = \frac{3b+2}{3}$$
$$a = \frac{3b}{3} + \frac{2}{3}$$
$$a = b + \frac{2}{3}$$

प्रश्न-18: $\lambda$ के किस मान के लिए

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x^2-2x), & \text{यदि } x \le 0 \\ 4x+1, & \text{यदि } x > 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $x=0$ पर संतत है। $x=1$ पर इसके सांतत्य पर विचार करें।

उत्तर- $x=0$ पर,

LHL :- $f(x) = \lambda(x^2-2x)$, जब $x \le 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \lambda(x^2-2x) = \lim_{x\to 0^-} \lambda(0) = 0$$

RHL :- $f(x) = 4x+1$, जब $x > 0$

$$\lim_{x\to 0^+} 4x+1 = \lim_{x\to 0^+} 4(0)+1 = 1$$

अतः $x=0$ पर $\lambda$ के किसी भी मान के लिए $f$ संतत नहीं है।

$x=1$ पर,

LHL :- $f(x) = 4x+1$, जब $x > 0$

$$\lim_{x\to 1^-} 4x+1 = \lim_{x\to 1^-} (4(1)+1 = 5$$

RHL :- $$\lim_{x\to 1^+} 4x+1 = \lim_{x\to 1^+} 4(1)+1 = 5$$

LHL = RHL

अतः $f$, $x=1$ पर संतत है।

प्रश्न-19 : दर्शाइए कि $g(x) = x-[x]$ द्वारा परिभाषित फलन समस्त पूर्णांक बिन्दुओं पर असतत

है। यहाँ $[x]$ उस महत्तम पूर्णांक निरूपित करता है, जो $x$ के बराबर या $x$ से कम है।

उत्तर- $x = c$ पूर्णांक पर,

$$f(x) = x - [x]$$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^-} x - [x]$

$= c - [c-1] = 1.$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+} x - [x]$

$= c - c = 0.$

$$LHL \neq RHL$$

अतः $f$, $x = c$, पर असंतत है।

प्रश्न-20: क्या $f(x) = x^2 - \sin x + 5$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर संतत है?

उत्तर- $x = \pi$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} (\pi)^2 - \sin\pi + 5$

$= (\pi)^2 - \sin\pi + 5.$

RHL :- $\lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} (\pi)^2$

$\sin \pi + 5 = (\pi)^2 - \sin \pi + 5$

LHL = RHL

अतः $f$, $x = \pi$ पर संतत है।

प्रश्न-21: निम्न फलनों के सांतत्य पर विचार कीजिए :-

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$

उत्तर- $f(x) = \sin x + \cos x$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x = c$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to c^-} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x = c - h$ रखने पर,

LHL :- $\lim_{h \to 0} \sqrt{2} \sin\left[(c-h) + \frac{\pi}{4}\right]$

$= \sqrt{2} \sin\left[c + \frac{\pi}{4}\right]$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^+}$

$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{h=0} \sqrt{2} \sin$

$(c+h+\pi/4) = \sqrt{2} \sin(c+\pi/4)$

अतः $x=c$ पर $f$ संतत है।

(b) $f(x) = \sin x - \cos x$.

उत्तर- $x=c$ पर,

$f(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left[x - \frac{\pi}{4}\right]$

LHL :- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{h \to 0} \sqrt{2} \sin$

$\left[c - h - \frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin\left[c - \frac{\pi}{4}\right]$

RHL :- $\lim_{h \to c^+} f(x) = \lim_{x \to 0} \sqrt{2} \sin$

$\left[c+h-\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2} \sin\left[c-\frac{\pi}{4}\right]$

अतः $x = c$ पर $f$ संतत है।

(c) $f(x) = \sin x . \cos x$

उत्तर- $f(x) = \sin x \cos x$

$= \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} \sin 2x$

$x = c$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \sin^2(c-h)$

$= \frac{1}{2} \sin 2c$

RHL :- $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \sin^2$

$(c+h) = \frac{1}{2} \sin 2c$

$LHL = RHL = f(c)$

PAGE No. 100
DATE

अतः $x = c$ पर $f$ संतत है।

प्रश्न-23: $f$ के सभी असांतत्यता के बिन्दुओं के ज्ञात कीजिए, जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{यदि } x < 0 \\ x+1, & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 0$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$

$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} = 1.$

RHL :- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x+1$

$= \lim_{x \to 0^+} 0+1 = 1.$

$LHL = RHL$

अतः $f$ किसी भी बिन्दु पर असंतत नहीं है।

प्रश्न-24: निर्धारित कीजिए कि फलन $f$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित एक संतत फलन है।

उत्तर- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin 1/x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$x = 0$ पर, $f(x) = x^2 \sin 1/x$, जब $x < 0$

LHL :- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)$

$= \lim_{x \to 0^-} (0)^2 \sin \frac{1}{0} = 0.$

RHL :- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (0) = 0$

LHL = RHL

अतः $x = 0$, पर फलन संतत है।

प्रश्न-25 : $f$ के सांतत्य की जाँच कीजिए, जहाँ $f$ निम्न प्रकार से परिभाषित है —

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - \cos x, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

उत्तर- $x = 0$ पर,

LHL :- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-}$

$\sin x - \cos x = \lim_{x \to 0^-} \sin 0 - \cos 0$

$= 0 - 1 = -1.$

RHL :- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-1) = -1.$

LHL = RHL

अतः $f$, $x = 0$ पर संतत है।

प्रश्न-26: $f(x) = \begin{cases} k\cos x / \pi - 2x, & x \neq \pi/2 \\ 3, & x = \pi/2 \end{cases}$

द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi/2$ पर।

उत्तर- दिया है :-

फलन $x = \pi/2$ पर संतत है।

$LHL = RHL = f(\pi/2)$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \to \pi/2^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{k\cos x}{\pi - 2x} = \lim_{x \to \pi/2^+} \frac{k\cos x}{\pi - 2x} = 3.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{k - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)} = 3.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{k \sin h}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{-k \sin h}{-2h}$$

$$= 3.$$

$$= \frac{k}{2} = 3.$$

$$k = 6 \quad \left[ \because \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \right]$$

प्रश्न-27 : $f(x) = \begin{cases} kx^2, & x \le 2 \\ 3, & x > 2 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = 2$ पर।

उत्तर- $x = 2$ पर फलन संतत है (दिया है)

$$\therefore \quad LHL = RHL = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \to 2^-} kx^2 = \lim_{x \to 2^+} (3) = k(2)^2$$

$$4k = 3 = 4k$$

$$k = \frac{3}{4}.$$

प्रश्न-28 : $f(x) = \begin{cases} kx + 1, & x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$ द्वारा परिभाषित फलन $x = \pi$ पर।

उत्तर- $LHL = RHL = f(\pi)$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = f(\pi)$$

$$\lim_{x \to \pi^-} kx+1 = \lim_{x \to \pi^+} \cos x = k(\pi)+1$$

$$k(\pi)+1 = \cos \pi = k\pi+1$$

$$k\pi+1 = -1 = k\pi+1$$

$$\pi k = -2$$

$$k = \frac{-2}{\pi}.$$

प्रश्न-29 : $f(x) = \begin{cases} kx+1, & \text{यदि } x \le 5 \\ 3x-5, & \text{यदि } x > 5 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित

फलन $x=5$ पर ।

उत्तर- $x=5$ पर, $f(x) = kx+1$, जब $x \le 5$

LHL :- $\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} (kx+1)$
$= 5x+1$

$$f(5) = k(5)+1 = 5k+1$$

RHL :- $\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} (3x-5)$

$= 15 - 5 = 10.$

$\therefore x = 5$ पर $f$ संतत है, यदि

$$LHL = RHL = f(5)$$

$$5k + 1 = 10$$
$$5k = 10 - 1$$
$$5k = 9$$

$$k = \frac{9}{5}.$$

प्रश्न-30: a और b के मानों को ज्ञात कीजिए ताकि

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \le 2 \\ ax+b, & 2 < x < 10 \\ 21, & x \ge 10 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है

उत्तर- $x = 2$ पर,

$f(x) = 5$, जब $x \le 2$

LHL :- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (5) = 5$

$f(2) = 5.$

RHL :- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (ax+b)$

$= 2a+b$

$x = 2$ पर $f$ संतत है। यदि

$LHL = RHL = f(2)$

$\therefore 2a + b = 5$ — (i)

$x = 10$ पर,

$f(x) = ax+b$, जब $x < 10$

LHL :- $\lim_{x \to 10^-} f(x) = \lim_{x \to 10^-} (ax+b)$

$= 10a + b.$

$f(x) = 21$, जब $x \geq 10.$

$\therefore$ RHL :- $\lim_{x \to 10^+} f(x) = \lim_{x \to 10^+} (21)$

$= 21.$

$\therefore f(10) = 21.$

$x = 10$ पर $f$ संतत है यदि

$LHL = RHL = f(21)$

$10a + b = 21$ — (ii)

समी॰(i) को (ii) से घटाने पर,

$$8a = 21 - 5 = 16$$

$$\therefore a = \frac{16}{8} = 2.$$

समी॰ 1 से, $2 \times 2 + b = 5$

$$b = 5 - 4 = 1.$$

अतः f एक संतत फलन है यदि $a = 2$, $b = 1$.

प्रश्न-31: दर्शाइए कि $f(x) = \cos x^2$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर. यहाँ $f(x) = \cos x^2$

$x = c$ पर,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} \cos x^2 = \cos c^2$$

$$f(c) = \cos c^2$$

अतः $f(x) = \cos x^2$ एक संतत फलन है

प्रश्न-32: दर्शाइए कि $f(x) = |\cos x|$ द्वारा परिभाषित फलन एक संतत फलन है।

उत्तर. यहाँ $f(x) = |\cos x|$

माना $x = c$ पर,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} |\cos x| = |\cos c|$$

$$f(c) = |\cos c|$$

अतः $x = c$ पर $f$ एक संतत फलन है।

प्रश्न-33: जाँचिए कि क्या $\sin|x|$ एक संतत फलन है।

उत्तर- माना $f(x) = \sin|x|$

$x = c$ पर,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} (\sin|x|) = \sin|c|$$

$$f(c) = \sin|c|$$

अतः $x = c$ पर $f$ एक संतत फलन है।

# अवकलन तथा समाकलन के सूत्र

| अवकलन | समाकलन |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ | $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ |
| $\frac{d}{dx}(x) = 1$ | $\int dx = x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ | $\int \cos x \, dx = \sin x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ | $\int \sin x \, dx = -\cos x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ | $\int \sec^2 x = \tan x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x . \cot x$ | $\int \operatorname{cosec} x \cot x = -\operatorname{cosec} x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x . \tan x$ | $\int \sec x \tan x = \sec x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$ | $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$ |

| अवकलन | समाकलन |
|---|---|
| $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $-\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1}x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$ | $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1}x + c.$ |
| $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$ | $-\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \cot^{-1}x + c.$ |
| $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ | $-\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{cosec}^{-1}x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ | $\int e^x\,dx = e^x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ | $\int \frac{1}{x}\,dx = \log x + c$ |
| $\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | — |

• अन्य सूत्र :-

(i) $(u+v)' = u' + v'$.

(ii) $(u-v)' = u' - v'$.

(iii) $(uv)' = u'v + uv'$.

(iv) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{2}$.

(v) $\log m \times n = \log m + \log n$.

(vi) $\log m^n = n \log m$.

(vii) $\log \frac{m}{n} = \log m - \log n$.

(viii) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a$.

## प्रश्नावली - 5.2

प्रश्न 1 से 8 में $x$ के सापेक्ष निम्नलिखित फलनों का अवकलन कीजिए :-

1. $\sin(x^2+5)$

उत्तर- माना : $y = \sin(x^2+5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(x^2+5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \sin(x^2+5) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^2+5) \cdot 2x + 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x \cdot \cos(x^2+5)$$

2. $\cos(\sin x)$

उत्तर- माना : $y = \cos(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \cos(\sin x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\sin x).\cos x$$

3. $\sin(ax+b)$.

उत्तर- माना : $y = \sin(ax+b)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(ax+b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(ax+b).\frac{d}{dx}(ax)+\frac{d}{dx}(b)$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos(ax+b).a$$

$$\frac{dy}{dx} = a.\cos(ax+b).$$

4. $\sec(\tan(\sqrt{x}))$.

उत्तर- माना : $y = \sec(\tan(\sqrt{x}))$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sec(\tan(\sqrt{x}))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sec(\tan(\sqrt{x})).\frac{d}{dx}\tan(\sqrt{x})$$

$$.\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec(\tan\sqrt{x}) . \tan(\tan\sqrt{x}) . \sec^2(\sqrt{x}) . \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec(\tan\sqrt{x}) . \tan(\tan\sqrt{x}) . \sec^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

5. $\frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

उत्तर- माना : $y = \frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\sin(ax+b)}{\cos(cx+d)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\sin(ax+b) . \cos(cx+d) - \sin(ax+b) . \frac{d}{dx}\cos(cx+d)}{[\cos(cx+d)]^2}$$

$$= \frac{\cos(ax+b) . a . \cos(cx+d) + \sin(ax+b) . \sin(cx+d) . c}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= \frac{a.\cos(ax+b).\cos(cx+d)}{\cos^2(cx+d)} + \frac{\sin(ax+b).c.\sin(cx+d)}{\cos^2(cx+d)}$$

$$= a.\cos(ax+b).\sec(cx+d) + c.\sin(ax+b).\tan(cx+d).\sec(cx+d)$$

6. $\cos x^3 . \sin^2(x^5)$

उत्तर- माना : $y = \cos x^3 . \sin^2(x^5)$

$$(u.v)^2 = u'v + uv'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\cos x^3 . \sin^2(x^5)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(\cos x^3).\sin^2(x^5) + \cos x^3 . \frac{d}{dx}\sin^2(x^5)$$

$$= \frac{d}{dx}\cos x^3 . \frac{d}{dx} x^3 . \sin^2(x^5) + \cos x^3 . \frac{d}{dx}\sin^2(x^5) . \frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= -\sin x^3 . 3x^2 . \sin^2(x^5) + \cos x^3 . 2\sin(x^5).\cos x^5 . 5x^4$$

$= -3x^2 . \sin x^3 . \sin^2 x^5 + 10 x^4 . \sin x^5 . \cos x^5 . \cos x^3$

$= 10 x^4 . \sin x^5 . \cos x^5 . \cos x^3 - 3x^2 . \sin x^3 . \sin^2 x^5 .$

7. $2\sqrt{\cot(x^2)}$

उत्तर- माना : $y = 2\sqrt{\cot(x^2)}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 2\sqrt{\cot(x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 2 (\cot(x^2))^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \frac{d}{dx} (\cot(x^2))^{1/2} \cdot \frac{d}{dx} \cot(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 . \frac{1}{2} (\cot x^2)^{-1/2} . (-\operatorname{cosec}^2(x^2)) . \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 . 1}{2 (\cot x^2)^{1/2}} . (-\operatorname{cosec}^2(x^2)) . 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x . \operatorname{cosec}^2(x^2)}{\sqrt{\cot(x^2)}}$$

8. $\cos(\sqrt{x})$

उत्तर- माना : $y = \cos(\sqrt{x})$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos(\sqrt{x}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

9. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x-1|, x \in R$, $x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर- $x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|1-h-1| - |1-1|}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{-h}$$

$$= -1.$$

$$RHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|1+h-1| - |1-1|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$

$\therefore$ फलन $f(x) = |x-1|, x \in R, x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

10. सिद्ध कीजिए कि महत्तम पूर्णांक फलन $f(x) = [x], 0 < x < 3, x = 1$ तथा $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

उत्तर- $x = 1$ पर,

$$LHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[1-h] - [1]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0-1}{-h} = \infty$$

$$RHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[1+h] - [1]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

यहाँ, $LHD \neq RHD$.

$\therefore$ फलन $f(x) = [x]$, $0 < x < 3$, $x = 1$ पर अवकलित नहीं है।

$x = 2$ पर,

$$LHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2-h] - [2]}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1-2}{-h}$$

$$= \infty$$

$$RHD = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2+h] - [2]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2-2}{h}$$

$$= 0.$$

यहाँ, LHD $\neq$ RHD, इसलिए, फलन $f(x) = [x], 0 \leq x < 3$, $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

## प्रश्नावली - 5.3

निम्न प्रश्नों में $dy/dx$ ज्ञात कीजिए।

1. $2x + 3y = \sin x$.

उत्तर- दोनों पक्षों में $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर :

$$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x - 2}{3}$$

2. $2x + 3y = \sin y$

उत्तर- $$\frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(3y) = \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin y) \cdot \frac{d}{dx}(y)$$

$$2 + 3\frac{dy}{dx} = \cos y \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} - 3\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos y - 3) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\cos y - 3}$$

3. $ax + by^2 = \cos y$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(ax) + \frac{d}{dx}(by^2) = \frac{d}{dx}(\cos y)$

$$a + 2by\frac{dy}{dx} = -\sin y \frac{dy}{dx}$$

$$2by\frac{dy}{dx} + \sin y \frac{dy}{dx} = -a$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-a}{2by + \sin y}$$

4. $xy + y^2 = \tan x + y$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\tan x)$

$$+ \frac{d}{dx}(y)$$

$$\frac{d}{dx}(x).y + x.\frac{d}{dx}(y) + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$1.y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + \frac{dy}{dx}$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = \sec^2 x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y - 1) = \sec^2 x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x - y}{x + 2y - 1}$$

5. $x^2 + xy + y^2 = 100.$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(100)$

$$2x + \frac{d}{dx}(x).y + x.\frac{d}{dx}(y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x + 1.y + x.\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x.\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx}(x+2y) = -2x - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-y}{x+2y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x+y)}{x+2y}$$

6. $x^3 + x^2.y + xy^2 + y^3 = 81$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^2).y + x^2.\frac{d}{dx}(y)$

$+ \frac{d}{dx}(x).y^2 + x.\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(81)$

$3x^2 + 2x.y + x^2.\frac{dy}{dx} + 1.y^2 + x.2y.\frac{dy}{dx}$

$+ 3y^2\frac{dy}{dx} = 0.$

$x^2.\frac{dy}{dx} + x.2y\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3x^2$

$- 2xy - y^2$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+2xy+3y^2) = -3x^2-2xy-y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3x^2-2xy-y^2}{x^2+2xy+3y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(3x^2+2xy+y^2)}{x^2+2xy+3y^2}$$

7. $\sin^2 y + \cos xy = K.$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(\sin^2 y) + \frac{d}{dx}(\cos xy) = \frac{d}{dx}(K)$

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 y) \cdot \frac{d}{dx}(\sin y) + \frac{d}{dx}(\cos xy).$$

$$\left\{\frac{d}{dx}(x).y + x.\frac{d}{dx}(y)\right\} = 0$$

$$2\sin y.\cos y\frac{dy}{dx} - \sin xy\left\{1.y + x\frac{dy}{dx}\right\}$$

$$= 0$$

$$\sin 2y\frac{dy}{dx} - y.\sin xy - x.\sin xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\sin 2y\frac{dy}{dx} - x.\sin xy\frac{dy}{dx} = \sin xy.y$$

$$\frac{dy}{dx}(\sin 2y - x.\sin xy) = \sin xy.y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin xy.y}{\sin 2y - x.\sin xy}$$

8. $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$

उत्तर- $\frac{d}{dx}(\sin^2 x) + \frac{d}{dx}(\cos^2 y) = \frac{d}{dx}(1)$

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x).\frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(\cos^2 y).$$

$$\frac{d}{dx}(\cos y) = 0.$$

$$2\sin x.\cos x - 2\cos y \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$-2\cos y \sin y \frac{dy}{dx} = -2\sin x \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\sin x \cos x}{-2\cos y \sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\sin 2y}$$

9. $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$

उत्तर- माना $x = \tan\theta$

$= \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$\left\{\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right\}$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$= 2\theta$

$= 2\tan^{-1}x$

$y = 2\tan^{-1}x$

$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}2\tan^{-1}x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

10. $y = \tan^{-1}\left(\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right)$

उत्तर- माना $x = \tan\theta$

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$$

$$\left\{\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right\}$$

$$y = \tan^{-1}(\tan 3\theta)$$

$$y = 3\theta$$

$$y = 3\tan^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}3\tan^{-1}x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{1+x^2}$$

11. $y = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

उत्तर- माना $x = \tan\theta$

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$y = \cos^{-1}(\cos 2\theta)$$

$$\left\{\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right\}$$

PAGE No. 06

$y = 2\theta$

$y = 2 \tan^{-1} x$

$\frac{d}{dx} y = \frac{d}{dx} 2 \tan^{-1} x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

12. $y = \sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

उत्तर- माना $x = \tan\theta$

$y = \sin^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$

$\left\{\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right\}$

$y = \sin^{-1}(\cos 2\theta)$

$y = \sin^{-1}\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\}$

$y = \frac{\pi}{2} - 2\theta$

$y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1} x$

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}.$$

13. $y = \cos^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$

उत्तर- माना $x = \tan\theta$

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$\left\{\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right\}$$

$$y = \cos^{-1}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right\}$$

$$y = \frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}y = \left(\frac{\pi}{2} - 2\tan^{-1}x\right)\frac{d}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{2}{1+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{1+x^2}$$

14. $y = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

उत्तर- माना : $x = \sin\theta$

$$y = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$\left\{\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}\right\}$$

$$y = \sin^{-1}\left(2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$y = \sin^{-1}\left(\sin 2\theta\right)$$

$$y = 2\theta$$

$$y = 2\sin^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}\left(2\sin^{-1}x\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

15. $y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

उत्तर- माना $x = \cos\theta$

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{2\cos^2\theta - 1}\right)$$

$$y = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$$

$$\{\cos 2\theta = (2\cos^2\theta - 1)\}$$

$$y = \sec^{-1}(\sec 2\theta)$$

$$y = 2\theta$$

$$y = 2\cos^{-1}x$$

$$\frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(2\cos^{-1}x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$$

प्रश्नावली 5.4

निम्न का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

1. $\frac{e^x}{\sin x}$

उत्तर- $\left(\frac{u}{v}\right)' = u'v - uv' / v^2$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(e^x).\sin x - e^x.\frac{d}{dx}(\sin x)}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{e^x.\sin x - e^x.\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$$

2. $e^{\sin^{-1}x}$

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\left(e^{\sin^{-1}x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1}x\right)$

$$= e^{\sin^{-1}x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $e^{x^3}$.

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\left(e^{x^3}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$= e^{x^3} \cdot 3x^2$

$= 3x^2 e^{x^3}$.

4. $\sin\left(\tan^{-1} e^{-x}\right)$

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\left\{\sin\left(\tan^{-1} e^{-x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} e^{-x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right) \cdot \frac{d}{dx}(-x)\right.$

$= \cos\left(\tan^{-1} e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{1+\left(e^{-x}\right)^2} \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$= -\cos\left(\tan^{-1} e^{-x}\right) \cdot \frac{1}{1+e^{-x2}} \cdot e^{-x}$

$= \frac{-\cos\left(\tan^{-1} e^{-x}\right) \cdot e^{-x}}{1+e^{-2x}}$

5. $\log\left(\cos e^{x}\right)$

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\left\{\log\left(\cos e^{x}\right)\right\} + \frac{d}{dx}\left(\cos e^{x}\right)$.

$\frac{d}{dx}(e^x)$.

$= \frac{1}{\cos e^x} + (-\sin e^x) + e^x$

$= -\frac{\sin e^x}{\cos e^x} \cdot e^x$

$= -\tan e^x \cdot e^x$

$= -e^x \cdot \tan e^x$

6. $e^x + e^{x^2} + \dots + e^{x^5}$.

उत्तर- $= \frac{d}{dx}(e^x) + \frac{d}{dx}(e^{x^2}) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) +$

$\dots + \frac{d}{dx}(e^{x^5}) \cdot \frac{d}{dx}(x^5)$

$= e^x + e^{x^2} \cdot 2x + \dots + e^{x^5} \cdot 5x^4$

$= e^x + 2x e^{x^2} + 3x^2 e^{x^3} + 4x^3 e^{x^4} + 5x^4 e^{x^5}$.

7. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$.

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}}\right) \cdot \frac{d}{dx}(e^{\sqrt{x}}) \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x e^{\sqrt{x}}}}$$

8. $\log(\log x)$.

उत्तर- $= \frac{d}{dx}\{\log(\log x)\} \cdot \frac{d}{dx}(\log x)$.

$\frac{d}{dx}(x)$

$$= \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} \cdot 1$$

$$= \frac{1}{x \cdot \log x}$$

9. $\frac{\cos x}{\log x}$.

उत्तर- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$= \frac{\frac{d}{dx}(\cos x) \cdot \log x - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x . \log x - \cos x . 1/x}{(\log x)^2}$$

$$= \frac{-(x \sin x . \log x + \cos x)}{x (\log x)^2}$$

10. $\cos(\log x + e^x)$.

उत्तर- $= \frac{d}{dx} \cos(\log x + e^x) . \left\{ \frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}(e^x) \right\}$

$$= -\sin(\log x + e^x) \left\{ \frac{1}{x} + e^x \right\}$$

$$= \frac{-\sin(\log x + e^x)}{x}$$

## प्रश्नावली 5.5

1 से 11 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों का $x$ के सापेक्ष अवकलन कीजिए :-

1. $\cos x . \cos 2x . \cos 3x$

उत्तर- माना : $y = \cos x . \cos 2x . \cos 3x$

दोनों पक्षों में लघुगुणक लेने पर :-

$$\log y = \log (\cos x . \cos 2x . \cos 3x)$$

$$\log y = \log \cos x + \log \cos 2x + \log \cos 3x$$

$$\{\log m.n = \log m + \log n\}$$

दोनों पक्षों में $x$ के सापेक्ष अवकलन करने पर :-

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\log \cos x) + \frac{d}{dx}(\log \cos 2x) + \frac{d}{dx}(\log \cos 3x)$$

$$\frac{d}{dx}(\log y) . \frac{d}{dx}(y) = \frac{d}{dx}(\log \cos x) . \frac{d}{dx}(\cos x) . \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(\log \cos 2x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos 2x) \cdot \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(\log \cos 3x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos 3x) \cdot \frac{d}{dx}(3x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) \cdot 1 + \frac{1}{\cos 2x}(-\sin 2x) \cdot 2 + \frac{1}{\cos 3x}(-\sin 3x) \cdot 3$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{3\sin 3x}{\cos 3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{-\sin x}{\cos x} - \frac{2\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{3\sin 3x}{\cos 3x}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \left[-\tan x - 2\tan 2x - 3\tan 3x\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = -\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x \left[\tan x + 2\tan 2x + 3\tan 3x\right]$$

2. $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

उत्तर- माना : $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}$

$$y = \left(\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}\right)^{1/2}$$

$$\{\log m^n = n \log m\}$$

$$\log y = \frac{1}{2} \log (x-1) + \log (x-2) - \{\log (x-3) + \log (x-4) + \log (x-5)\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \log m.n = \log m + \log n \\ \log m/n = \log m - \log n \end{array}\right\}$$

$$\frac{d}{dx}(\log y) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d}{dx}\log (x-1) + \frac{d}{dx}\log (x-2)\right\} - \left\{\frac{d}{dx}\log (x-3) + \frac{d}{dx}\log (x-4) + \frac{d}{dx}\log (x-5)\right\}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1}\cdot 1.0 + \frac{1}{x-2}\cdot 1.0\right\} - \left\{\frac{1}{x-3}\cdot 1.0 + \frac{1}{x-4}\cdot 1.0 + \frac{1}{x-5}\cdot 1.0\right\}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right\} - \left\{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-5}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\, y\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)(x-5)}}\left[\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-5}\right]$$

3. $(\log x)^{\cos x}$

उत्तर- $y = (\log x)^{\cos x}$

$\log y = (\log (\log x)^{\cos x}$

$\log y = \cos x . \log \log x$

$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \cos x . \frac{d}{dx} \log \log x + \log$

$\log x . \frac{d}{dx} \cos x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[ \cos x . \frac{1}{\log x} . \frac{1}{x} + \log \right.$

$\left. \log x . \frac{d}{dx} \cos x \right]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{\cos x}{x . \log x} + \log \log x (-\sin x) \right.$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\log x)^{\cos x} \left[ \frac{\cos x - \sin x \log \log x}{+ x . \log x} \right.$

4. $x^x - 2^{\sin x}$

उत्तर- माना : $u = x^x$, $v = 2^{\sin x}$

$\therefore y = u - v.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} \quad \text{— समी. 1}$$

$$u = x^x$$

$$\log u = x \log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x$$

$$= x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot 1 = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u\left[1 + \log x\right] = x^x\left[1 + \log x\right] \quad \text{— समी. 2}$$

$$v = 2^{\sin x}$$

$$\log v = \sin x \log 2$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log 2 \cdot \frac{d}{dx}\sin x = \log 2 \cdot \cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\cos x \log 2\right] = 2^{\sin x}\left[\cos x \log 2\right] \quad \text{— समी. 3}$$

समी. 2 से $du/dx$ तथा समी. 3 से $dv/dx$ का मान समी. 1 में रखने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = x^x\left[1 + \log x\right] - 2^{\sin x}\left[\cos x \log 2\right]$$

5. $(x+3)^2 \cdot (x+4)^3 \cdot (x+5)^4$

उत्तर- $y = (x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4$

$$\log y = 2 \log (x+3) + 3 \log (x+4) + 4 \log (x+5)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{2(x+4)(x+5) + 3(x+3)(x+5) + 4(x+3)(x+4)}{\div (x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left[ \frac{2(x^2+9x+20) + 3(x^2+8x+15) + 4(x^2+7x+12)}{\div (x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+3)^2 (x+4)^3 (x+5)^4 \left[ \frac{9x^2+70x+133}{(x+3)(x+4)(x+5)} \right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x+3)(x+4)^2 (x+5)^3 (9x^2+70x+133)$$

6. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$

उत्तर- माना

$$u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x, \quad v = x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\therefore \quad y = u + v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{— समी. 1}$$

$$u = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\log u = x \log\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\log\left(x + \frac{1}{x}\right) + \log\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + \log\left(x + \frac{1}{x}\right) \cdot 1$$

$$= \frac{x^2}{x^2+1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} + \log\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{du}{dx} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x \left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x + \frac{1}{x}\right)\right] \quad \text{— समी. 2}$$

$$v = x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\log v = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\log x$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\log x + \log x.$$

$$\frac{d}{dx}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} + \log x$$

$$\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\left(\frac{x^2+1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} - \frac{\log x}{x^2}\right]$$

$$= x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x^2+1-\log x}{x^2}\right] \quad \text{समी॰3}$$

समी॰ 2 से $dy/dx$ तथा समी॰ 3 से $dv/dx$ का मान समी॰ 1 में रखने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^x\left[\frac{x^2-1}{x^2+1} + \log\left(x+\frac{1}{x}\right)\right] + x^{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left[\frac{x^2+1-\log x}{x^2}\right]$$

$$(\log x)^x + x^{\log x}$$

माना : $u = (\log x)^x$, $v = x^{\log x}$

$\therefore y = u+v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{— समी॰ 1}$$

$$u = (\log x)^x$$

$\log u = x \log \log x$

$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx} \log \log x + \log \log x \cdot \frac{d}{dx} x$

$= x \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x} + \log \log x \cdot 1 = \frac{1}{\log x} + \log \log x$

$\frac{du}{dx} = (\log x)^x \left[\frac{1 + \log x \cdot \log \log x}{\log x}\right]$

$= (\log x)^{x-1} (1 + \log x \cdot \log \log x)$ — समी०

$v = x^{\log x}$

$\log v = \log x \log x$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log x \cdot \frac{d}{dx} \log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} \log$

$= \log x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{dv}{dx} = v \left[\frac{2 \log x}{x}\right] = x^{\log x} \left[\frac{2 \log x}{x}\right]$

$= x^{\log x - 1}(2 \log x)$ — समी॰3

समी॰2 से $du/dx$ तथा समी॰3 से $dv/dx$ का मान समी॰1 में रखने पर:

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^{x-1}(1 + \log x . \log \log x) + x^{\log x - 1}(2 \log x).$$

8. $(\sin x)^x + \sin^{-1}\sqrt{x}$

उत्तर- माना $u = (\sin x)^x$, $v = \sin^{-1}\sqrt{x}$

$\therefore y = u + v$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{— समी॰1}$$

$u = (\sin x)^x$

$\log u = x \log \sin x$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x . \frac{d}{dx} \log \sin x + \log \sin x . \frac{d}{dx} x$$

$$= x . \frac{1}{\sin x} . \cos x + \log \sin x . 1$$

$= x(\cot x + \log \sin x)$

$$\frac{du}{dx} = (\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x)$$ — समी॰ 2

$$\frac{dv}{dx}(v) = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}\sqrt{x})$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \log x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\log x = \log x \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{d}{dx}\sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$ — समी॰ 3

समी॰ 2 से $du/dx$ तथा समी॰ 3 से $dv/dx$ का मान समी॰ 1 में रखने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = (\sin x)^x (x \cot x + \log \sin x) + \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

9. $x^{\sin x} + (\sin x)^{\cos x}$

उत्तर- $u = \$\, x^{\sin x}$, $v = (\sin x)^{\cos x}$

$y = u + v$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ — समी. 1

$u = x^{\sin x}$

$\log u = \sin x \log x$

$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \sin x . \frac{d}{dx} \log x + \log x .$

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \sin x . \frac{1}{x} + \log x . \cos x$

$= \frac{\sin x}{x} + \log x \cos x$

$\frac{du}{dx} = x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + \log x \cos x\right]$

$\frac{du}{dx} = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \log x \cos x)$ — समी. 2

$v = (\sin x)^{\cos x}$

$\log v = \cos x \log \sin x$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \cos x . \frac{d}{dx} \log \sin x +$

$\log \sin x \cdot \frac{d}{dx} \cos x$

$= \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cos x + \log \sin x(-\sin x)$

$\frac{dv}{dx} = v\left[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x\right]$

$= (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cot x - \sin x \log \sin x)$ — समी. 3

समी. 2 से $du/dx$ तथा समी. 3 से $dv/dx$ का मान समी. 1 में रखने पर :-

$\frac{dy}{dx} = x^{\sin x - 1}(\sin x + x \log x \cos x)$

$+ (\sin x)^{\cos x}(\cos x \cot x - \sin x \log \sin x)$

10. $x^{x\cos x} + \frac{x^2+1}{x^2-1}$

उत्तर- $u = x^{x\cos x}$, $v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore y = u + v$

$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$ — समी. 1

$u = x^{x\cos x}$

$\log u = x \log x \cos x$

$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x\cos x \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x$

$\frac{d}{dx} x\cos x = x\cos x \frac{1}{x} + \log x$

$(-x\sin x + \cos x)$

$= \cos x - x\sin x \log x + \cos x \log x$

$\frac{du}{dx} = u\left[\cos x - x\sin x \log x + \cos x \log x\right]$

$= x^{x\cos x}\left[\cos x - x\sin x \log x + \cos x \log x\right]$ — समी॰ 2

$v = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\log v = \log(x^2+1) - \log(x^2-1)$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \frac{1}{x^2-1}\cdot 2x$

$$= \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]$$

$$= \frac{x^2+1}{x^2-1}\left[\frac{-4x}{(x^2+1)(x^2-1)}\right]$$

$$= -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \quad \text{— समी॰ 3}$$

समी॰ 2 से $dy/dx$ तथा समी॰ 3 से $dv/dx$ का मान समी॰ 1 में रखने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = x^{x\cos x}\left[\cos x - x\sin x \log x + \cos x \log x\right] - \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

11. $(x\cos x)^x + (x\sin x)^{1/x}$

उत्तर- माना : $u = (x\cos x)^x$, $v = (x\sin x)^{1/x}$

$$y = u + v$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \quad \text{— समी॰ 1}$$

$$u = (x\cos x)^x$$

$$\log u = x \log(x \cos x)$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\log(x\cos x) + \log(x\cos x)\cdot\frac{d}{dx}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{(x\cos x)}(-x\sin x + \cos x) + \log(x\cos x)\cdot 1$$

$$= -x\tan x + 1 + \log(x\cos x)$$

$$\frac{du}{dx} = (x\cos x)^x\left[1 - x\tan x + \log(x\cos x)\right]$$

— समी॰2

$$v = (x\sin x)^{1/x}$$

$$\log v = \frac{1}{x}\log(x\sin x)$$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\frac{d}{dx}\log(x\sin x) + \log(x\sin x)\cdot\frac{d}{dx}\frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x\sin x}(x\cos x + \sin x) +$$

$\log(x \sin x)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = (x\sin x)^{1/x}\left[\frac{x\cot x + 1 - \log(x\sin x)}{x^2}\right]$$

— समी॰ 3

समी॰ 2 से $dy/dx$ तथा समी॰ 3 से $dv/dx$ का मान समी॰ 1 में रखने पर :-

$$\frac{dy}{dx} = (x\cos x)^x\left[1 - x\tan x + \log(x\cos x)\right] + (x\sin x)^{1/x}\left[1 + \cot x . x - \log(x\sin x) \div x^2\right]$$

12 से 15 तक के प्रश्नों में प्रदत्त फलनों के लिए $dy/dx$ ज्ञात कीजिए :-

12. $x^y + y^x = 1$

उत्तर- $u = x^y$, $v = y^x$

$u + v = 1$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$$ — समी॰ 1

$u = x^y$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = y \cdot \frac{d}{dx}\log x + \log x.$$

$$\frac{d}{dx}y = y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} = x^y\left[\frac{y}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}\right]$$

— समी॰2

$v = y^x$

$\log v = x \log y$

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx}\log y + \log y \cdot \frac{d}{dx}x$$

$$= x \cdot \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \log y \cdot 1$$

$$\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$

$$\frac{dv}{dx} = y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} + \log y\right]$$

— समी॰3

समी॰ 2 से $du/dx$ तथा समी॰3 से $dv/dx$ का मान समी॰ 1 में रखने पर:-

$$x^y\left[\frac{y}{x}+\log x\cdot\frac{dy}{dx}\right]+y^x\left[\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\log y\right]=0$$

$$\Rightarrow y x^{y-1}+x^y\log x\frac{dy}{dx}+x y^{x-1}\frac{dy}{dx}+y^x\log y=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(x^y(\log x)+xy^{x-1}\right)=-\left(y^x\log y+yx^{y-1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y^x\log y+yx^{y-1}}{x^y\log x+xy^{x-1}}.$$

13. $y^x=x^y$.

उत्तर- $y^x=x^y$

$$x.\log y=y\log x$$

$$x.\frac{d}{dx}\log y+\log y\frac{d}{dx}x=y\frac{d}{dx}\log x+\log x.\frac{d}{dx}y$$

$$x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\log y.1=y\frac{1}{x}+\log x\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x}{y}-\log x\right)=\frac{y}{x}-\log y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{x-y\log x}{y}\right) = \frac{y-x\log y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y-x\log y)}{x(x-y\log x)}$$

14. $(\cos x)^y = (\cos y)^x$

उत्तर- $y\cos x = x\cos y$

$$y\cdot\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\cdot\frac{d}{dx}y = x\cdot\frac{d}{dx}$$

$$\cos y + \cos y\frac{d}{dx}x$$

$$\Rightarrow y(-\sin x) + \cos x\cdot\frac{dy}{dx} = x\cdot$$

$$(-\sin y)\frac{dy}{dx} + \cos y\cdot 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(\cos x + x\sin y) = \cos y + y\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y + y\sin x}{\cos x + x\sin y}.$$

15. $xy = e^{(x-y)}$

उत्तर- $\log xy = \log e^{(x-y)}$

$$\log x + \log y = (x-y)\log e$$

$$\log x + \log y = (x-y)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}+1\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+y}{y}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(y+1)}$$

16. $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$

द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8)$

$$\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{d}{dx}x^2 + \frac{1}{1+x^4}\cdot\frac{d}{dx}x^4 + \frac{1}{1+x^8}\frac{d}{dx}x^8$$

$$\log x + \log y = (x-y)\log e$$

$$\log x + \log y = (x-y)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y}+1\right) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1+y}{y}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{x(y+1)}$$

16. $f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$ द्वारा प्रदत्त फलन का अवकलज ज्ञात कीजिए और इस प्रकार $f'(1)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\log f(x) = \log(1+x) + \log(1+x^2) + \log(1+x^4) + \log(1+x^8)$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{d}{dx} x^2 + \frac{1}{1+x^4} \cdot \frac{d}{dx} x^4 + \frac{1}{1+x^8} \frac{d}{dx} x^8$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 + \frac{1}{1+x^8} \cdot 8x^7$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

$$f'(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\left[\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8}\right]$$

17. $(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)$ का अवकलन निम्न तीन प्रकार से कीजिए :-

(i) गुणनफल नियम का प्रयोग करके ।

(ii) गुणनफल के विस्तारण द्वारा एक एकल बहुपद प्राप्त करके ।

(iii) लघुगणकीय अवकलन द्वारा ।

यह भी सत्यापित कीजिए कि इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं ।

उत्तर- माना : $y = (x^2 + 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

(i) $\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x + 8)\frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9) +$

$(x^3 + 7x + 9)\frac{d}{dx}(x^2 - 5x + 8)$

$= (x^2 - 5x + 8)(3x^2 + 7) + (x^3 + 7x + 9)$

$(2x - 5)$

$= (3x^4 + 7x^2 - 15x^3 - 35x + 24x^2 + 56)$

$+ 2x^4 - 5x^3 + 14x^2 - 35x + 18x - 45$

$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11.$

(ii) $y = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)$

$= x^5 + 7x^3 + 9x^2 - 5x^4 - 35x^2 - 45x +$
$8x^3 + 56x + 72$

$= x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 26x^2 + 11x + 72$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}x^5 - 5\frac{d}{dx}x^4 + 15\frac{d}{dx}x^3$

$- \cancel{15}\ 26\frac{d}{dx}x^2 + 11\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}72$

$= 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$

(iii) $\log y = \log(x^2 - 5x + 8) + \log(x^3 + 7x + 9)$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2 - 5x + 8)} \cdot d/dx\,(x^2 - 5x + 8)$$

$$+ \frac{1}{(x^3 + 7x + 9)} \cdot \frac{d}{dx}(x^3 + 7x + 9)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2 - 5x + 8}(2x - 5) + \frac{1}{x^2 + 7x + 9}(3x^2 + 7)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{(2x-5)(x^3+7x+9) + (3x^2+7)(x^2-5x+8)}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$= y\left[\frac{2x^4 + 14x^2 + 18x - 5x^3 - 35x - 45 + 3x^4 - 15x^3 + 24x^2 + 7x^2 - 35x + 56}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 - 5x + 8)(x^3 + 7x + 9)\left[\frac{5x^5 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11}{(x^2-5x+8)(x^3+7x+9)}\right]$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 52x + 11$$

अतः इस प्रकार प्राप्त तीनों उत्तर समान हैं।

## प्रश्नावली 5.6

प्रश्न 1 से 10 तक में $dy/dx$ ज्ञात कीजिए

1. $x = 2at^2, \; y = at^4$.

उत्तर- $\frac{dx}{dt} = 2a(2t) = 4at$, $\frac{dy}{dt} = a(4t^3)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4at^3}{4at} = t^2.$$

2. $x = a\cos\theta, \; y = b\cos\theta$

उत्तर- $\frac{dx}{d\theta} = a(-\sin\theta) = -a\sin\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = b(-\sin\theta) = -b\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-b\sin\theta}{-a\sin\theta} = \frac{b}{a}.$$

3. $x = \sin t,\ y = \cos 2t$

उत्तर- $\frac{dx}{dt} = \cos t,\ \frac{dy}{dt} = -\sin 2t . 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-2\sin 2t}{\cot t}$$

$$= \frac{-2(2\sin t\cos t)}{\cos t} = -4\sin t.$$

4. $x = 4t,\ y = 4/t$

उत्तर- $\frac{dx}{dt} = 4,\ \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{4}{t^2}}{4} = \frac{-1}{t^2}$$

5. $x = \cos\theta - \cos 2\theta,\ y = \sin\theta - \sin 2\theta$

उत्तर- $\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + 2\sin 2\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 2\cos 2\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos\theta - 2\cos 2\theta}{-\sin\theta + 2\sin 2\theta}$$

6. $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 + \cos\theta)$

उत्तर- $\frac{dx}{d\theta} = a(1 - \cos\theta)$

$$\frac{dy}{dt} = a(\theta - \sin\theta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2}$$

7. $x = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$, $y = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}$

उत्तर-

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\sin^3 t \frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t} - \sqrt{\cos 2t}\frac{d}{dt}\sin^3 t}{\left(\sqrt{\cos 2t}\right)^2}$$

$$= \frac{\sin^3 t \frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-\sin 2t).2 - \sqrt{\cos 2t}.3\sin^2 t\cos t}{\cos 2t}$$

$$= \frac{-\sin^3 t.\sin 2t - 3\cos 2t.\sin^2 t\cos t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \cos^3 t \frac{d}{dt}\sqrt{\cos 2t} - \sqrt{\cos 2t}$$

$$\frac{d}{dt}\cos^3 t \div \left(\sqrt{\cos 2t}\right)^2$$

$$= \cos^3 t.\frac{1}{2\sqrt{\cos 2t}}(-\sin 2t).2 -$$

$$\sqrt{\cos 2t}.3\cos^2 t(-\sin t) \div \cos 2t$$

$$= \frac{-\cos^3 t.\sin 2t + 3\cos 2t.\cos^2 t\sin t}{\cos 2t\sqrt{\cos 2t}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\cos^3 t.\sin 2t + 3\cos 2t.\cos^2 t\sin t}{-\sin^3 t.\sin 2t - 3\cos 2t.\sin^2 t\cos t}$$

$$= -\cos^3 t.(2\sin t\cos t) + 3\cos 2t\cos^2 t\sin t \div (-\sin^3 t.(2\sin t\cos t) - 3\cos 2t.\sin^2 t\cos t)$$

$$= \frac{\cos^2 t \sin t(-2\cos^2 t) + 3\cos 2t}{\sin^2 t \cos t(-2\sin^2 t - 3\cos 2t)}$$

$$= \frac{\cos t\left[-2\cos^2 t + 3(2\cos^2 t - 1)\right]}{\sin t\left[-2\sin^2 t - 3(1 - 2\sin^2 t)\right]}$$

$$= \frac{\cos t\left[-2\cos^2 t + 6\cos^2 t - 3\right]}{\sin t\left[-2\sin^2 t - 3 + 6\sin^2 t\right]}$$

$$= \frac{\cos t\left[4\cos^2 t - 3\right]}{\sin t\left[-3 + 4\sin^2 t\right]}$$

$$= -\frac{4\cos^3 t - 3\cos t}{3\sin t - 4\sin^3 t}$$

$$= -\frac{\cos 3t}{\sin 3t}$$

$$= -\cot 3t.$$

8. $x = a\left(\cos t + \log \tan t/2\right)$ $y = a\sin t.$

उत्तर-

$$\frac{dx}{dt} = a\left(-\sin t + \frac{1}{\tan\frac{t}{2}} \cdot \sec^2\frac{t}{2} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)$$

$$= a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)$$

$$= a\left(\frac{-\sin^2 t + 1}{\sin t}\right)$$

$$= a\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)$$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{a\left(\frac{\cos^2 t}{\sin t}\right)}$$

$$= \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$= \tan t.$$

9. $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$

उत्तर- $\frac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$

PAGE No. 26
DATE

$$\frac{dy}{d\theta} = b \sec^2\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{b \sec^2\theta}{a \sec\theta \tan\theta}$$

$$= \frac{b \sec\theta}{a \tan\theta} = \frac{b\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)}{a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$$

$$= \frac{b}{a} \operatorname{cosec}\theta.$$

10. $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$, $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

उत्तर- $\frac{dx}{d\theta} = a[-\sin\theta + (\theta\cos\theta + \sin\theta)]$

$= a\theta\cos\theta$

$\frac{dy}{d\theta} = a[\cos\theta - (-\theta\sin\theta + \cos\theta)]$

$= a\theta\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta.$$

11. $x = \sqrt{a^{\sin^{-1} t}}$, $y = \sqrt{a^{\cos^{-1} t}}$, दर्शाइए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.

उत्तर- $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1} t}}} \cdot \frac{d}{dx} a^{\sin^{-1} t}$

$= \frac{1}{2\sqrt{a^{\sin^{-1} t}}} \cdot a^{\sin^{-1} t} \cdot \log a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \frac{1}{2x} \cdot x^2 \cdot \log a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{x \log a}{\sqrt{1-t^2}}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1} t}}} \cdot \frac{d}{dx} a^{\cos^{-1} t}$

$= \frac{1}{2\sqrt{a^{\cos^{-1} t}}} \cdot a^{\cos^{-1} t} \cdot \log a \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

$= \frac{1}{2y} \cdot y^2 \cdot \log a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

$= -\frac{y \log a}{\sqrt{1-t^2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{y \log a}{\sqrt{1-t^2}}}{\frac{x \log a}{\sqrt{1-t^2}}} = -\frac{y}{x}$.

## प्रश्नावली 5.7

प्रश्न 1 से 10 तक में दिए फलनों के द्वितीय कोटि के अवकलज ज्ञात कीजिए :

1. $x^2 + 3x + 2$

उत्तर- $y = x^2 + 3x + 2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+3x+2) = 2x+3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x+3) = 2.$$

2. $x^{20}$.

उत्तर- $y = x^{20}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{20}) = 20x^{19}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(20x^{19}) = 380x^{18}.$$

3. $x . \cos x$

उत्तर- $y = x \cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x.\cos x) = x.\frac{d}{dx}\cos x +$$

$$\cos x \cdot \frac{d}{dx} x = -x \sin x + \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-x \sin x + \cos x)$$

$$= -\left(x \frac{d}{dx} \sin x + \sin x \cdot \frac{d}{dx} x\right)$$

$$-\sin x = -x \cos x - \sin x - \sin x$$

$$= \cancel{-s} -(x \cos x + 2 \sin x).$$

4. $\log x$.

उत्तर- $y = \log x$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

5. $x^3 \log x$

उत्तर- $y = x^3 \log x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 \log x). = x^3 \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\log x + \log x \cdot \frac{d}{dx} x^3 = x^3 \cdot \frac{1}{x} + \log x.$$

$3x^2 = x^2 + 3x^2 \log x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x^2 \log x)$

$= 2x + 3\left(x^2 \frac{d}{dx} \log x + \log x \frac{d}{dx} x^2\right)$

$= 2x + 3\left(x^2 . \frac{1}{x} + \log x . 2x\right)$

$= 2x + 3x + 6x \log x = 5x + 6x \log x$

$= x(5 + 6 \log x)$

6. $e^x \sin 5x$

उत्तर- $y = e^x \sin 5x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x \sin 5x) = e^x . \frac{d}{dx}$

$\sin 5x + \sin 5x . \frac{d}{dx} e^x = e^x . \cos 5x . 5 +$

$\sin 5x . e^x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(5e^x \cos 5x + e^x \sin 5x)$

$= 5\left(e^x \frac{d}{dx} \cos 5x + \cos 5x \frac{d}{dx} e^x\right) +$

$\left(e^x \frac{d}{dx} \sin 5x + \sin 5x \frac{d}{dx} e^x\right)$

$= 5\left[e^x(-\sin 5x).5 + \cos 5x . e^x\right] +$

$\left[e^x . \cos 5x . 5 + \sin 5x . e^x\right]$

$= e^x(-25 \sin 5x + 5 \cos 5x + 5$

$\cos 5x + \sin 5x) = e^x(10 \cos 5x -$

$24 \sin 5x)$.

7. $e^{6x} \cos 3x$.

उत्तर- $y = e^{6x} \cos 3x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{6x} \cos 3x) = e^{6x} . \frac{d}{dx}$

$\cos 3x + \cos 3x . \frac{d}{dx} e^{6x}$

$= e^{6x}(-\sin 3x).3 + \cos 3x . e^{6x}.6$

$= 3e^{6x}(-\sin 3x + 2\cos 3x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[3e^{6x}(-\sin 3x + 2\cos 3x)\right]$

$= 3e^{6x} . \frac{d}{dx}(-\sin 3x + 2\cos 3x) +$

PAGE No. 29
DATE

$$(-\sin 3x + 2\cos 3x) \cdot \frac{d}{dx} 3e^{6x}$$

$$= 3e^{6x} \cdot (-3\cos 3x - 6\sin 3x) + (-\sin 3x + 2\cos 3x) \cdot 18e^{6x}$$

$$= e^{6x}(-9\cos 3x - 18\sin 3x - 18\sin 3x + 36\cos 3x)$$

$$= e^{6x}(27\cos 3x - 36\sin 3x)$$

$$= 9e^{6x}(3\cos 3x - 4\sin 3x)$$

8. $\tan^{-1} x$

उत्तर- $y = \tan^{-1} x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \frac{(1+x^2)\frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{0-2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

9. $\log(\log x)$

उत्तर- $y = \log(\log x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\log(\log x)$$

$$\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\log x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{(x\log x)}$$

$$= \frac{(x\log x)\frac{d}{dx}1 - 1\frac{d}{dx}(x\log x)}{(x\log x)^2}$$

$$= \frac{0 - \left(x.\frac{1}{x} + \log x\right)}{(x\log x)^2}$$

$$= -\frac{(1+\log x)}{(x\log x)^2}$$

10. $\sin(\log x)$

उत्तर- $y = \sin(\log x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(\log x)$$

$= \cos(\log x) \cdot 1/x$

$= \dfrac{\cos(\log x)}{x}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cos(\log x)}{x}\right] = x \dfrac{d}{dx} \cos(\log x) - \cos(\log x) \cdot d/dx(x) \div (x)^2$

$= \dfrac{x\left\{-\sin(\log x)\frac{1}{x}\right\} - \cos(\log x) \cdot 1}{(x)^2}$

$= \dfrac{-\sin(\log x) - \cos(\log x)}{(x)^2}$

11. यदि $y = 5\cos x - 3\sin x$ है तो सिद्ध कीजिए कि $d^2y/dx^2 + y = 0$

उत्तर- $y = 5\cos x - 3\sin x$

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}(5\cos x - 3\sin x)$

$= -5\sin x - 3\cos x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}(-5\sin x - 3\cos x)$

$= -5\cos x + 3\sin x$

$= -(5\cos x - 3\sin x) = -y$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

12. यदि $y = \cos^{-1}x$ है तो $d^2y/dx^2$ को केवल $y$ के पदों में ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $y = \cos^{-1}x$

$\cos y = x$

$$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(-\operatorname{cosec} y \cot y) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \operatorname{cosec} y \cot y (-\operatorname{cosec} y)$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 y \cot y$$

PAGE No. 31
DATE

13. यदि $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$ है तो दर्शाइए कि $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$

उत्तर- $y = 3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)) = -3\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x} + 4\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx} = -3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}[-3\sin(\log x) + 4\cos(\log x)]$$

$$= -3\cos(\log x)\cdot\frac{1}{x} - 4\sin(\log x)\cdot\frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x}[3\cos(\log x) + 4\sin(\log x)]$$

$$= -\frac{1}{x}\cdot y$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}y$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$$

14. यदि $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$ है तो दर्शाइए कि $d^2y/dx^2 - (m+n)\, dy/dx + mny = 0$

उत्तर- $y = Ae^{mx} + Be^{nx}$

$$\frac{dy}{dx} = A\frac{d}{dx}e^{mx} + B\frac{d}{dx}e^{nx}$$

$$\frac{dy}{dx} = A.\, me^{mx} + B.\, ne^{mx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\, m\frac{d}{dx}e^{mx} + B\, n\frac{d}{dx}e^{nx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\, m^2 e^{mx} + B\, n^2 e^{nx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (m+n)\frac{dy}{dx} + mny =$$

$$Am^2e^{mx} + Bn^2e^{nx} - (m+n).$$

$A\,me^{mx} + B\,ne^{nx} + mn\left(Ae^{mx} + Be^{nx}\right)$

$= Ae^{mx}\left[m^2 - m(m+n) + mn\right]$

$+ Be^{nx}\left[n^2 - n(m+n) + mn\right.$

$= Ae^{mx}\left[m^2 - m^2 - mn + mn\right] + Be^{nx}$

$\left[n^2 - mn - n^2 + mn\right]$

$= Ae^{mx} \times 0 + Be^{nx} \times 0$

$= 0.$

15. यदि $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$ है तो दर्शाइए कि $d^2y/dx^2 = 49\,y$ है।

उत्तर- $y = 500\,e^{7x} + 600\,e^{-7x}$

$\frac{dy}{dx} = 500\frac{d}{dx}e^{7x} + 600\frac{d}{dx}e^{-7x}$

$= 500\,e^{7x} \times 7 + 600 \times e^{-7x}(-7)$

$= 3500\,e^{7x} - 4200\,e^{-7x}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 3500\frac{d}{dx}e^{7x} - 4200\frac{d}{dx}e^{-7x}$

$= 3500\,e^{7x} \times 7 - 4200 \times e^{-7x} \times (-7)$

उत्तर-

$= 500 \times 49\, e^{7x} + 600 \times 49\, e^{-7x}$

$= 49\,(500\, e^{7x} + 600\, e^{-7x})$

$= 49\, y$

16. यदि $e^{y}(x+1) = 1$ है तो दर्शाइए कि $d^2y/dx^2 = (dy/dx)^2$ है।

उत्तर- $e^{y}(x+1) = 1$

$1.e^{y} + (x+1)e^{y}\dfrac{dy}{dx} = 0$

$e^{y} + 1.\dfrac{dy}{dx} = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = -e^{y}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = -e^{y}\dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{dy}{dx}.\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dy} \times \dfrac{dy}{dx}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

17. यदि $y = (\tan^{-1}x)^2$ है तो दर्शाइए कि $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$ है।

उत्तर-

$$y = (\tan^{-1} x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\tan^{-1} x \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\tan^{-1} x}{1+x^2}$$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2\tan^{-1} x$$

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = \frac{2}{1+x^2}$$

$$(1+x^2)^2\frac{d^2y}{dx^2} + (2x)(1+x^2)\frac{dy}{dx} = 2.$$

OR

$$(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2.$$