अध्याय - 4 : सारणिक

प्रश्नावली 4.1

प्रश्न 1 व 2 में सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$

उत्तर- $= 2(-1) - (-5) \times 4$
$= -2 + 20$
$= 18.$

2.(i) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

उत्तर- $= \cos\theta(\cos\theta) - \sin\theta(-\sin\theta)$
$= \cos^2\theta + \sin^2\theta$
$= 1.$

(ii) $\begin{vmatrix} x^2 - x + 1 & x - 1 \\ x + 1 & x + 1 \end{vmatrix}$

उत्तर- $= x(x^2 - x + 1) + 1(x^2 - x + 1) - (x+1)(x-1)$
$= x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 - (x^2 - 1^2)$
$= x^3 + 1 - x^2 + 1$
$= x^3 - x^2 + 2.$

3. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, तो दिखाइए $|2A| = 4|A|$.

उत्तर-

$$|2A| = 4|A|$$

$$\left|2 \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right| = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 4(2-8)$$

$$8-32 = 4(-6)$$

$$-24 = -24$$

$$LHS = RHS.$$

4. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो दिखाइए $|3A| = 27|A|$

उत्तर-

$$|3A| = 27|A|$$

$$\left|3 \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right| = 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 27 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

$$\left(1\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 4\end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix}0 & 2\\0 & 4\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$3(36-0) - 0(0-0) + 3(0-0) = 27\{1(4-0) - 0(0-0) + 1(0-0)\}$

$3(36) - 0 + 0 = 27(4 - 0 + 0)$

$108 = 108$

LHS = RHS.

5. निम्न सारणिकों का मान ज्ञात कीजिए :-

(i) $\begin{vmatrix}3 & -1 & -2\\0 & 0 & -1\\3 & -5 & 0\end{vmatrix}$

उत्तर-

$= 3\begin{vmatrix}0 & -1\\-5 & 0\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0 & -1\\3 & 0\end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix}0 & 0\\3 & -5\end{vmatrix}$

$= 3(0-5) + 1(0+3) - 2(0-0)$

$= 3(-5) + 1(3) - 2(0)$

$= -15 + 3 - 0$

$= -12.$

) $\begin{vmatrix}3 & -4 & 5\\1 & 1 & -2\\2 & 3 & 1\end{vmatrix}$

उत्तर-

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+6) + 4(1+4) + 5(3-2)$$
$$= 3(7) + 4(5) + 5(1)$$
$$= 21 + 20 + 5$$
$$= 46.$$

(iii) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

उत्तर-

$$= 0\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0(0+9) - 1(0-6) + 2(-3+0)$$
$$= 0(9) - 1(-6) + 2(-3)$$
$$= 0 + 6 - 6$$
$$= 0.$$

(iv) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{vmatrix}$

उत्तर-

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(0-5) + 1(0+3) - 2(0-6)$$
$$= 2(-5) + 1(3) - 2(-6)$$
$$= -10 + 3 + 12$$
$$= 5.$$

6. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{bmatrix}$ हो तो $|A|$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 4 & -9 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-9+12) - 1(-18+15) - 2(8-5)$$

$$= 3 + 3 - 6$$

$$= 0.$$

7. x के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 4 \\ 6 & x \end{vmatrix}$

उत्तर-

$$2 - 20 = 2x^2 - 24$$

$$-18 = 2x^2 - 24$$

$$2x^2 = 24 - 18$$

$$2x^2 = 6$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm\sqrt{3}.$$

(ii) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

उत्तर- $10 - 12 = 5x - 6x$

$-2 = -x$

$x = 2.$

8. यदि $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ हो तो x बराबर है :

(A) 6 (B) ± 6 (C) -6 (D) 0

उत्तर- $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$

$x^2 - 36 = 36 - 36$

$x^2 = 36$

$x = \pm\sqrt{36}$

$x = \pm 6.$

अतः विकल्प B सही है।

प्रश्नावली 4.2

1. निम्नलिखित प्रत्येक में दिए गए शीर्ष बिन्दुओं वाले त्रिभुजों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(i) (1,0), (6,0), (4,3)

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1(0-3) - 0(6-4) + 1(18-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(15)$$

$= 7.5$ वर्ग इकाई.

(ii) (2,7), (1,1), (10,8)

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(1-8) - 7(1-10) + 1(8-10)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(47)$$

$= 25.5$ वर्ग इकाई.

(iii) $(-2,-3), (3,2), (-1,-8)$.

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2(2+8)+3(3+1)+1(-24+2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-30)$$

$= 15$ वर्ग इकाई.

2. दर्शाइए कि बिन्दु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ और $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[a\begin{vmatrix} c+a & 1 \\ a+b & 1 \end{vmatrix} - (b+c)\begin{vmatrix} b & 1 \\ c & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & a+b \end{vmatrix}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(c+a-a-b)-(b+c)(b-c)+1(ab+b^2-c^2-ac)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a(c-b)-(b^2-c^2)+ab+b^2-c^2-ac\right]$$

$$= \frac{1}{2}(ac-ab+b^2+c^2+ab+b^2-c^2-ac)$$

$$= \frac{0}{2}$$

$$= 0.$$

अतः बिन्दु A, B तथा C संरेख हैं।

3. प्रत्येक में K का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 4 वर्ग इकाई है जहाँ शीर्षबिन्दु निम्न है:

(i) $(K,0), (4,0), (0,2)$.

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} K & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[K(0-2)-0(4-0)+1(8-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-2K+8) = -K+4.$$

$|-k+4| = 4$

$-k+4 = \pm 4$

$-k+4 = 4$ or $-k+4 = -4$

$k = 0$ or $-k = -8$

$k = 8.$

अतः k का मान 0 या है 8.

(ii) $(-2,0), (0,4), (0,k)$.

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2(4-k) - 0(0-0) + 1(0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(-8+2k)$$

$$= -4+k$$

$|-4+k| = 4$

$-4+k = \pm 4$

$-4+k = 4$ or $-4+k = -4$

$k = 8$ or $k = 0.$

अतः k का मान 0 या 8 है।

4. (i) सारणिकों का प्रयोग करके (1,2) और (3,6) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- area $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}[1(6-y)-2(3-x)+1(3y-6x)] = 0$

$\Rightarrow 6-y-6+2x+3y-6x = 0$

$\Rightarrow -4x+2y = 0$

$\Rightarrow 2x = y$.

(ii) सारणिकों का प्रयोग करके (3, 1) और (9, 3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- area $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$.

$\Rightarrow \frac{1}{2}[3(3-y)-1(9-x)+1(9y-3x)] = 0$

$\Rightarrow 9-3y-9+x+9y-3x = 0$

$\Rightarrow -2x+6y = 0$

$\Rightarrow x = 3y$.

5. यदि शीर्ष (2, −6), (5, 4) और (k, 4) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई हो तो k का मान ?

(A) 12 (B) -2 (C) -12, -2
(D) 12, -2

उत्तर-

$$\text{area } \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \\ k & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2(4-4)+6(5-k)+1(20-4k)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(30-6k+20-4k)$$

$$= 25-5k$$

$$|25-5k| = 35$$
$$25-5k = \pm 35$$
$$25-5k = 35 \quad \text{or} \quad 25-5k = -35$$
$$-5k = 35-25 \quad \text{or} \quad -5k = -35-25$$
$$-5k = 10 \quad \text{or} \quad -5k = -60$$
$$k = -2 \quad \text{or} \quad k = 12$$

अतः k का मान -2 या 12 है।

∴ विकल्प D सही है।

प्रश्नावली 4.3

निम्न सारणिकों के अवयवों के उपसारणिक एवं सहखण्ड लिखिए ।

1.(i) $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$

उत्तर- $M_{11} = 3$, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 3$.

$M_{12} = 0$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 0$.

$M_{21} = -4$, $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 4$.

$M_{22} = 2$, $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2$.

(ii) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

उत्तर- $M_{11} = d$, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = d$.

$M_{12} = b$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -b$.

$M_{21} = c$, $A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -c$.

$M_{22} = a$, $A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = a$.

2.(i) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

उत्तर-

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0.$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1.$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 1.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = 0.$$

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 0.$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 0.$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 1.$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = 0.$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = 0.$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 0.$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 1.$

(ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

उत्तर- $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 1 = 11.$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6.$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \; 3 - 0 = 3.$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4.$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \; 2 - 0 = 2$

$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 20 = -20$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13$

$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 0 = 5$

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = 11.$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -6$

$A_{13} = (-1)^{1+4} M_{13} = 3.$

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = 4.$

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 2.$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1.$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -20.$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = 13.$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = 5.$

3. दूसरी पंक्ति के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 = 7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -(9-16) = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(10-3) = -7$$

इसलिए,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(7) + 0(7) + 1(-7) = 7.$$

4. तीसरे स्तंभ के अवयवों के सहखण्डों का प्रयोग करके

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix}$$

का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}.$

$a_{13} = yz,\ a_{23} = zx,\ a_{33} = xy.$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & y \\ 1 & z \end{vmatrix} = z - y.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & z \end{vmatrix} = -(z-x) = x - z.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & y \end{vmatrix} = y - x.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & zx \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} = yz(z-y) + zx(x-z) + xy(y-x)$$

$$= yz^2 - y^2z + zx^2 - xz^2 + xy^2 - x^2y$$
$$= zx^2 - x^2y - xz^2 + xy^2 + yz^2 - y^2z$$
$$= x^2(z-y) - x(z^2-y^2) + yz(z-y)$$
$$= (z-y)[x^2 - x(z+y) + yz]$$
$$= (z-y)[x^2 - xz - xy + yz]$$
$$= (z-y)[x(x-z) - y(x-z)]$$
$$= (z-y)(x-z)(x-y)$$
$$= (x-y)(y-z)(z-x).$$

5. यदि $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ और a_{ij} का सहखण्ड A_{ij} हो तो Δ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है:

(A) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$
(B) $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + a_{13}A_{31}$
(C) $a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13}$

(D) $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

उत्तर- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ का मान निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है : $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

अतः विकल्प (D) सही है।

प्रश्नावली 4.4

प्रश्न 1 और 2 में प्रत्येक आव्यूह का सहखंडज ज्ञात कीजिए।

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A_{11} = 4$, $A_{12} = -3$, $A_{21} = -2$, $A_{22} = 1$.

A का सहखंडज :-

$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A_{11} = 3$, $A_{12} = -12$, $A_{13} = 6$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 5$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -11$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 5$.

सहखंडज :- $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -11 \\ -12 & 5 & -1 \\ 6 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

प्रश्न-3 और 4 में सत्यापित कीजिए कि $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A).A = |A|.I$ है।

3. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A_{11} = -6,\ A_{12} = 4,\ A_{21} = -3,\ A_{22} = 2.$

$|A| = -12 + 12 = 0.$

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12+12 & -6+6 \\ 24-24 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(\text{adj } A).A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -12+12 & -18+18 \\ 8-8 & 12-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$|A|.I = 0.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

अतः $A\,(\text{adj } A) = (\text{adj } A).\,A = |A|.I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर: $|A| = 1(0-0) + 1(9+2) + 2(0-0) = 11.$

$A_{11} = 0,\ A_{12} = -11,\ A_{13} = 0,\ A_{21} = 3,\ A_{22} = 1,$

$A_{23} = -1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = 8,\ A_{33} = 3.$

सहखंडज :- $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

$$A\,(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+11+0 & 3-1-2 & 2-8+6 \\ 0+0+0 & 9+0+2 & 6+0-6 \\ 0+0+0 & 3+0-3 & 2+0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A).\,A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+9+2 & 0+0+0 & 0-6+6 \\ -11+3+8 & 11+0+0 & -22-2+24 \\ 0-3+3 & 0+0+0 & 0+2+9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$$|A|.I = 11 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

अतः $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A).A = |A|.I = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$

प्रश्न-5 से 11 में दिए गए प्रत्येक आव्यूहों के व्युत्क्रम (जिनका अस्तित्व हो) ज्ञात कीजिए।

5. $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A_{11} = 3,\ A_{12} = -4,\ A_{21} = 2,\ A_{22} = 2$.

$|A| = 6+8 = 14 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

6. $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A_{11} = 2,\ A_{12} = 3,\ A_{21} = -5,\ A_{22} = -1$

$|A| = -2 + 15 = 13 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर- $|A| = 1(10-0) - 2(0-0) + 3(0-0) = 10 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 10,\ A_{12} = 0,\ A_{13} = 0,\ A_{21} = -10,\ A_{22} = 5,$

$A_{23} = 0,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -4,\ A_{33} = 2.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & -10 & 2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तर- $|A| = 1(-3-0) - 0(-3-0) + 0(6-15) = -3$

$-3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = -3,\ A_{12} = 3,\ A_{13} = -9,\ A_{21} = 0,$

$A_{22} = -1,\ A_{23} = -2,\ A_{31} = 0,\ A_{32} = 0,\ A_{33} = 3$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -9 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर- $|A| = 2(-1-0) - 1(4-0) + 3(8-7) = -3$

$-3 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = -1,\ A_{12} = -4,\ A_{13} = 1,\ A_{21} = 5,\ A_{22} = 23,$

$A_{23} = -11,\ A_{31} = 3,\ A_{32} = 12,\ A_{33} = -6.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,A = \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 3 \\ -4 & 23 & 12 \\ 1 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर- $|A| = 1(8-6) + 1(0+9) + 2(0-6) = -1 \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 2, A_{12} = -9, A_{13} = -6, A_{21} = 0, A_{22} = -2,$

$A_{23} = -1, A_{31} = -1, A_{32} = 3, A_{33} = 2.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -9 & -2 & 3 \\ -6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 9 & 2 & -3 \\ 6 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$

उत्तर- $|A| = 1(-\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 0(0-0) + 0(0-0)$
$= -1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व है।

$A_{11} = 1, A_{12} = 0, A_{13} = 0, A_{21} = 0, A_{22} = -\cos\alpha,$

$A_{23} = -\sin\alpha, A_{31} = 0, A_{32} = -\sin\alpha, A_{33} = +\cos\alpha$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

12. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ है तो सत्यापित कीजिए कि $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

उत्तर- $A_{11} = 5, A_{12} = -2, A_{21} = -7, A_{22} = 3.$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0$ A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$B_{11} = 9, B_{12} = -7, B_{21} = -8, B_{22} = 6.$

$|B| = 54 - 56 = -2 \neq 0$ B^{-1} का अस्तित्व है।

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \text{adj} B = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} -9/2 & 4 \\ 7/2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{45}{2} - 8 & \frac{63}{2} + 12 \\ \frac{35}{2} + 6 & -\frac{49}{2} - 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -61/2 & 87/2 \\ 47/2 & -67/2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+49 & 24+63 \\ 12+35 & 16+45 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 67 & 87 \\ 47 & 61 \end{bmatrix}$$

$|AB| = 67 \times 61 - 87 \times 47 = 4087 - 4089 = -2$

$-2 \neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ का अस्तित्व है।

$C_{11} = 61,\ C_{12} = -47,\ C_{21} = -87,\ C_{22} = 67.$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \text{adj } AB = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{61}{2} & \frac{87}{2} \\ \frac{47}{2} & -\frac{67}{2} \end{bmatrix}$$

अत: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ है।

13. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ है तो दर्शाइए कि $A^2 - 5A + 7I = 0$ है इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए

उत्तर- $LHS = A^2 - 5A + 7I$

$= AA - 5A + 7I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 3+2 \\ -3-2 & -1+4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 = RHS$$

$$A^2 - 5A + 7I = 0$$

$$A^2 - 5A = -7I$$

दोनों पक्षों में A^{-1} की गुणा करने पर।

$$AAA^{-1} - 5AA^{-1} = -7IA^{-1}$$

$$AI - 5I = -7A^{-1} \qquad [\because AA^{-1} = I]$$

$$7A^{-1} = 5I - A$$

$$= 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow 7A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

14. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ के लिए a और b ऐसी संख्याएँ ज्ञात कीजिए ताकि $A^2 - aA + bI = 0$ हो।

उत्तर- $A^2 + aA + bI = 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 9+2 & 6+2 \\ 3+1 & 2+1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3a & 2a \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 11+3a+b & 8+2a+0 \\ 4+a+0 & 3+a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$4 + a = 0$
$a = -4$

$3 + a + b = 0$
$b = -3 - a$
$b = -3 + 4$
$b = 1.$

अतः $a = -4, b = 1.$

15. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ के लिए दर्शाइए कि $A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$ है।

इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए ।

उत्तर-

$$A^3 - 6A^2 + 5A + 11I = 0$$

$$A^3 - 6A^2 + 5A = -11I$$

दोनो पक्षों में A^{-1} की गुणा करने पर ।

$$A^2AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 5AA^{-1} = -11IA^{-1}$$

$$A^2I - 6AI + 5I = -11A^{-1} \quad [\because AA^{-1} = I]$$

$$11A^{-1} = -A^2 + 6A - 5I$$

$$11A^{-1} = -\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -3 & 8 & -14 \\ 7 & -3 & 14 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$- 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & 14 \\ -7 & 3 & -14 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 12 & -18 \\ 12 & -6 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$11A^{-1} = \begin{bmatrix} -4+6-5 & -2+6+0 & -1+6+0 \\ 3+6-0 & -8+12-5 & 14-18+0 \\ -7+12+0 & 3-6+0 & -14+18-5 \end{bmatrix}$$

$$11\,A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ तो सत्यापित कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$.

है तथा इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $A^3 - 6A^2 + 9A - 4I = 0$

$A^3 - 6A^2 + 9A = 4I$

दोनो पक्षों में A^{-1} की गुणा करने पर :-

$A^2AA^{-1} - 6AAA^{-1} + 9AA^{-1} = 4IA^{-1}$

$A^2I - 6AI + 9I = 4A^{-1}$ $[\because AA^{-1} = I]$

$4A^{-1} = A^2 - 6A + 9I$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -5 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ -6 & 12 & -6 \\ 6 & -6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 6-12+9 & -5+6=0 & 5-6+0 \\ -5+6+0 & 6-12+9 & -5+6+0 \\ 5-6+0 & -5+6=0 & 6-12+9 \end{bmatrix}$$

$$4A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

17. यदि A, 3×3 कोटि का वर्ग आव्यूह है तो |adj A| का मान ज्ञात कीजिए।

(A) $|A|$
(B) $|A|^2$
(C) $|A|^3$
(D) $3|A|$

उत्तर- हम जानते हैं कि $\text{adj } A = |A| I$

$$\Rightarrow (\text{adj } A) A = |A| = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |(\text{adj } A)A| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

$$\Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^2$$

अतः विकल्प (B) सही है।

18. यदि A कोटि दो का व्युत्क्रमीय आव्यूह है तो $\det(A^{-1})$ बराबर :

(A) $\det(A)$
(B) $1 / \det(A)$
(C) 1
(D) 0

उत्तर- A व्युत्क्रमीय आव्यूह है, अतः $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} A$

A कोटि दो का आव्यूह है,

माना $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

इसलिए, $|A| = ad - bc$ तथा $\text{adj } A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix}$$

$$\det(A^{-1}) = |A^{-1}| = \begin{vmatrix} \frac{d}{|A|} & -\frac{b}{|A|} \\ -\frac{c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{|A|^2} \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{|A|^2} (ad - bc)$$

$$= \frac{1}{|A|^2} |A| = \frac{1}{|A|} \text{ or } \frac{1}{\det(A)}$$

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 4.5

1. $x+2y=2,\ 2x+3y=3.$

उत्तर- $AX=B$ के रूप में :-

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

$|A| = 3-4 = -1 \neq 0.$

अतः समीकरण संगत हैं ।

2. $2x-y=5,\ x+y=4.$

उत्तर- $AX=B$ के रूप में :-

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}$$

$|A| = 2+1 = 3 \neq 0.$

अतः समीकरण संगत हैं ।

3. $x+3y=5,\ 2x+6y=8.$

उत्तर- $AX=B$ के रूप में :-

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix}6 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A)B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30-24 \\ -10+8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

समीकरण का कोई हल नहीं है ।
अतः समीकरण असंगत है ।

4. $x+y+z=1$, $2x+3y+2z=2$, $ax+ay+2az=4$.

उत्तर- $AX=B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ a & a & 2a \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1(6a-2a) - 1(4a-2a) + 1(2a-3a)$$
$$= a \neq 0.$$

अतः समीकरण संगत है ।

5. $3x-y-2z=2$, $2y-z=-1$, $3x-5y=3$.

उत्तर- $AX=B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 0 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 3(0-5) + 1(0+3) - 2(0-6)$
$|A| = -15+3+12 = 0.$

$A_{11} = -5,\ A_{12} = -3,\ A_{13} = -6,\ A_{21} = 10,\ A_{22} = 6,$
$A_{23} = 12,\ A_{31} = 5,\ A_{32} = 3,\ A_{33} = 6.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(\text{adj } A)\, B = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ -6 & 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10-10+15 \\ -6-6+9 \\ -12-12+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} \neq 0.$$

समीकरण का कोई हल नहीं है।
अतः समीकरण असंगत है।

6. $5x - y + 4z = 5,\ 2x + 3y + 5z = 2,\ 5x - 2y + 6z = -1.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|A| = 5(18+10) + 1(12-25) + 4(-4-15)$
$|A| = 140 - 13 - 76 = 51 \neq 0.$

अतः समीकरण संगत है।

7. $5x + 2y = 4, \; 7x + 3y = 5.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 15 - 14 = 1 \neq 0.$

अतः समीकरण संगत है।

$A_{11} = 3, \; A_{12} = -7, \; A_{21} = -2, \; A_{22} = 5.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$$

$AX = B, \; X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & +5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 - 10 \\ -28 + 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$x = 2, \; y = -3.$

8. $2x - y = -2, \; 3x + 4y = 3.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$|A| = 8+3 = 11 \neq 0.$

अतः समीकरण संगत है।

$A_{11} = 4, A_{12} = -3, A_{21} = 1, A_{22} = 2.$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -8+3 \\ 6+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/11 \\ 12/11 \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$$

9. $4x - 3y = 3, 3x - 5y = 7.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

अतः समीकरण संगत है।

$|A| = 10 - 6 = 4 \neq 0$

$A_{11} = -5, \; A_{12} = -3, \; A_{21} = 3, \; A_{22} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 - 10 \\ -9 + 25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/4 \\ 16/4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = -1, \; y = 4.$

9. $4x - 3y = 3, \; 3x - 5y = 7.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$|A| = -20 + 9 = -11 \neq 0$

अतः समीकरण संगत है ।

$A_{11} = -5, A_{12} = -3, A_{21} = 3, A_{22} = 4$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-11} \begin{bmatrix} -15+21 \\ -9+28 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6/11 \\ -19/11 \end{bmatrix}$$

$$x = -\frac{6}{11}, y = -\frac{19}{11}.$$

10. $5x + 2y = 3, 3x + 2y = 5.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

अतः समीकरण संगत है।

$A_{11} = 2, A_{12} = -3, A_{21} = -2, A_{22} = 5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/4 \\ 16/4 \end{bmatrix}$$

$x = -1, y = 4.$

11. $2x + y + z = 1, \; x - 2y - z = 3/2, \; 3y - 5z = 9$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$|A| = 2(10+3) - 1(-5-0) + 1(3-0) = 26+5+3$
$= 34 \neq 0$

अतः समीकरण संगत है।

$A_{11} = 13,\ A_{12} = 5,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = 8,\ A_{22} = -10,$
$A_{23} = -6,\ A_{31} = 1,\ A_{32} = 3,\ A_{33} = -5$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{adj}\ A = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13 & 8 & 1 \\ 5 & -10 & 3 \\ 3 & -6 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 13+12+9 \\ 5-15+27 \\ 3-9-45 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 34 \\ 17 \\ -51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$x = 1,\ y = 1/2,\ z = -3/2.$

12. $x - y + z = 4,\ 2x + y - 3z = 0,\ x + y + z = 2.$

उत्तर- $AX = B$ के रूप में :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

~~AX~~

$|A| = 1(1+3) + 1(2+3) + 1(2-1)$

$|A| = 1(4) + 1(5) + 1(1) = 4+5+1 = 10 \neq 0$

अतः समीकरण संगत है।

$A_{11} = 4$, $A_{12} = -5$, $A_{13} = 1$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = -2$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = 5$, $A_{33} = 3$.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1} B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 16+0+4 \\ -20+0+10 \\ 4-0+6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

13. $2x + 3y + 3z = 5$, $x - 2y + z = -4$, $3x - y - 2z = 3$.

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 2(4+1) - 3(-2-3) + 3(-1+6)$$
$$|A| = 40 \neq 0$$

$A_{11} = 5$, $A_{12} = 5$, $A_{13} = 5$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = -13$, $A_{23} = 11$, $A_{31} = 9$, $A_{32} = 1$, $A_{33} = -7$.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x = 1,\ y = 2,\ z = -1.$

14. $x - y + 2z = 7,\ 3x + 4y - 5z = -5,\ 2x - y + 3z = 12.$

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$|A| = 1(12-5) + 1(9+10) + 2(-3-8)$

$|A| = 7 + 19 - 22 = 26 - 22 = 4$

$A_{11} = 7,\ A_{12} = -19,\ A_{13} = -11,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = -1,$
$A_{23} = -1,\ A_{31} = -3,\ A_{32} = 11,\ A_{33} = 7.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ 11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -19 & -1 & 11 \\ -11 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 49-5-36 \\ -133+5+132 \\ -77+5+84 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$x = 2,\ y = 1,\ z = 3.$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ है तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। A^{-1} का प्रयोग करके

निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$2x - 3y + 5z = 11$$
$$3x + 2y - 4z = -5$$
$$x + y - 2z = -3.$$

उत्तर- $|A| = 2(-4+4) + 3(-6+4) + 5(3-2) = -1$

$A_{11} = 0,\ A_{12} = 2,\ A_{13} = 1,\ A_{21} = -1,\ A_{22} = -9,$
$A_{23} = -5,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = 23,\ A_{33} = 13.$

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{ adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & -9 & 23 \\ 1 & -5 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 - 5 + 6 \\ -22 - 45 + 69 \\ -11 - 25 + 39 \end{bmatrix}$$

$x = 1,\ y = 2,\ z = 3.$

16. 4 kg प्याज, 3 kg गेहूँ और 2 kg चावल का मूल्य 60 Rs है। 2 kg प्याज, 4 kg गेहूँ और 6 kg चावल का मूल्य 90 Rs है। 6 kg प्याज, 2 kg गेहूँ और 3 kg चावल का मूल्य 70 Rs है। आव्यूह विधि द्वारा प्रत्येक का मूल्य प्रति kg ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$4x + 3y + 2z = 60$$
$$2x + 4y + 6z = 90 \text{ or } x + 2y + 3z = 45$$
$$6x + 2y + 3z = 70$$

$AX = B$,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \\ 70 \end{bmatrix}$$

या

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 60 \\ 45 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$A_{11} = 0$, $A_{12} = 15$, $A_{13} = -10$, $A_{21} = -5$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = 10$, $A_{31} = 5$, $A_{32} = -10$, $A_{33} = 5$.

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ +15 & 0 & -10 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$|A| = 4 \times 0 + 3 \times 15 + 2 \times (-10)$

$|A| = 25$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 15 & 0 & -10 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 15 & 0 & -10 \\ -10 & 10 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 60 \\ 45 \\ 70 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-9+14 \\ 36-0-28 \\ -24+18+14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

प्याज $(x) = ₹\,5$, गेहूँ $(y) = ₹\,8$, चावल $(z) = ₹\,8$