अध्याय - 3 : आव्यूह

- आव्यूह का प्रकार :-

(1) स्तंभ आव्यूह (Column Matrix) :-

एक आव्यूह स्तंभ आव्यूह कहलाता है, यदि उसमें केवल एक स्तंभ होता है ।

उदाहरण - $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times1}$

(2) पंक्ति आव्यूह (Row Matrix) :-

एक आव्यूह पंक्ति आव्यूह कहलाता है, यदि उसमें केवल एक पंक्ति होती है ।

उदाहरण - $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{1\times3}$

(3) वर्ग आव्यूह (Square Matrix) :-

एक आव्यूह जिसमें पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के समान होती है, एक वर्ग आव्यूह कहलाता है ।

अतः $m \times n$ आव्यूह, वर्ग आव्यूह कहलाता है, यदि $m = n$ हो ।

उदाहरण -

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 5 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

(4) विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix)

एक वर्ग आव्यूह विकर्ण आव्यूह कहलाता है, यदि विकर्ण के अतिरिक्त इसके सभी अवयव शून्य होते हैं।

उदाहरण - $\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}_{2\times2}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times3}$

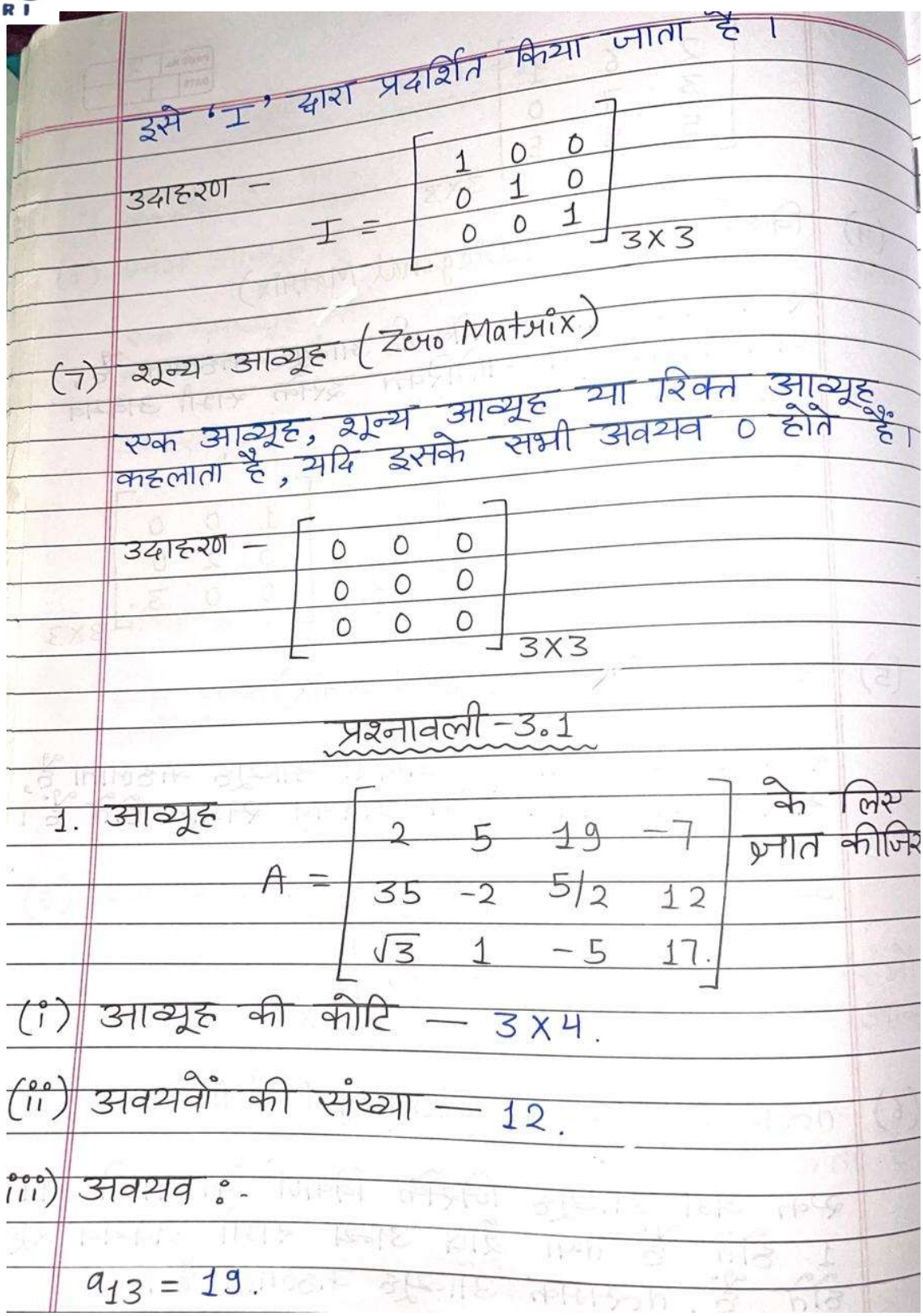
(5) अदिश आव्यूह (Scalar Matrix)

एक विकर्ण आव्यूह अदिश आव्यूह कहलाता है, यदि इसके विकर्ण के अवयव समान होते हैं।

उदाहरण - $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}_{3\times3}$

(6) तत्समक आव्यूह (Identity Matrix)

एक वर्ग आव्यूह जिसके विकर्ण के सभी अवयव 1 होते हैं तथा शेष अन्य सभी अवयव शून्य होते हैं, तत्समक आव्यूह कहलाता है।



इसे 'I' द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

उदाहरण – $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

(7) शून्य आव्यूह (Zero Matrix)

एक आव्यूह, शून्य आव्यूह या रिक्त आव्यूह कहलाता है, यदि इसके सभी अवयव 0 होते हैं।

उदाहरण – $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$

प्रश्नावली - 3.1

1. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 19 & -7 \\ 35 & -2 & 5/2 & 12 \\ \sqrt{3} & 1 & -5 & 17 \end{bmatrix}$ के लिए ज्ञात कीजि

(i) आव्यूह की कोटि — 3 × 4.

(ii) अवयवों की संख्या — 12.

(iii) अवयव :-

$a_{13} = 19$.

$a_{21} = 35$.

$a_{33} = -5$.

$a_{24} = 12$.

$a_{23} = 5/2$.

2. यदि किसी आव्यूह में 24 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 13 अवयव हों तो कोटियाँ क्या होंगी?

उत्तर- 24 अवयव :-

संभव कोटियाँ — 1X24, 2X12, 3X8, 4X6, 6X4, 8X3, 12X2, 24X1.

13 अवयव :-

संभव कोटियाँ — 1X13, 13X1.

3. यदि किसी आव्यूह में 18 अवयव हैं तो इसकी संभव कोटियाँ क्या हैं? यदि इसमें 5 अवयव हों तो क्या होगा?

उत्तर- 18 अवयव :-

संभव कोटियाँ — 1X18, 2X9, 3X6, 6X3, 9X2, 18X1.

5 अवयव :-

संभव कोटियाँ — $1 \times 5, 5 \times 1$.

4. एक 2×2 आव्यूह $A = [a_{ij}]$ की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्न प्रकार से प्रदत्त हैं :-

(i) $a_{ij} = \frac{(i+j)^2}{2}$.

उत्तर- $a_{11} = \frac{(1+1)^2}{2} = \frac{(2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

$a_{12} = \frac{(1+2)^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2}$.

$a_{21} = \frac{(2+1)^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2}$.

$a_{22} = \frac{(2+2)^2}{2} = \frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

आव्यूह $= \begin{bmatrix} 2 & 9/2 \\ 9/2 & 8 \end{bmatrix}$.

(ii) $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

उत्तर- $a_{11} = \frac{1}{1} = 1$.

$a_{12} = \frac{1}{2}$.

$a_{21} = \frac{2}{1} = 2$.

$a_{22} = \frac{2}{2} = 1$.

आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(000/111) $a_{ij} = \frac{(i+2j)^2}{2}$.

उत्तर-

$a_{11} = \frac{(1+2\times1)^2}{2} = \frac{(3)^2}{2} = \frac{9}{2}$.

$a_{12} = \frac{(1+2\times2)^2}{2} = \frac{(5)^2}{2} = \frac{25}{2}$.

$a_{21} = \frac{(2+2\times1)^2}{2} = \frac{(4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$.

$a_{22} = \frac{(2+2\times2)^2}{2} = \frac{(6)^2}{2} = \frac{36}{2} = 18$.

आव्यूह $= \begin{bmatrix} 9/2 & 25/2 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}$

5. एक 3×4 आव्यूह की रचना कीजिए जिसके अवयव निम्नलिखित प्रकार से प्राप्त होते हैं:

(i) $a_{ij} = \frac{1}{2}|-3i+j|$

उत्तर- $a_{11} = \frac{1}{2}|-3\times1+1| = \frac{1}{2}|-3+1| = \frac{1}{2}|-2|$

$a_{11} = 1$.

$a_{12} = \frac{1}{2}|-3\times1+2| = \frac{1}{2}|-3+2| = \frac{1}{2}$.

$a_{13} = \frac{1}{2}|-3\times1+3| = \frac{1}{2}|-3+3| = 0$.

$a_{14} = \frac{1}{2}|-3\times1+4| = \frac{1}{2}|-3+4| = \frac{1}{2}$.

$a_{21} = \frac{1}{2}|-3\times2+1| = \frac{1}{2}|-6+1| = \frac{1}{2}|$

$a_{21} = \frac{5}{2}$.

$a_{22} = \frac{1}{2}|-3\times2+2| = \frac{1}{2}|-4| = 2$.

$a_{23} = \frac{1}{2}|-3\times2+3| = \frac{1}{2}|-6+3| = \frac{3}{2}$.

$a_{24} = \frac{1}{2}|-3\times2+4| = \frac{1}{2}|-6+4| = 1$.

$a_{31} = \frac{1}{2}|-3\times3+1| = \frac{1}{2}|-9\times1| = 4$.

$a_{32} = \frac{1}{2}|-3\times3+2| = \frac{1}{2}|-9+2| = \frac{7}{2}$.

$a_{33} = \frac{1}{2}|-3\times3+3| = \frac{1}{2}|-9+3| = 3$.

$a_{34} = \frac{1}{2}|-3\times3+4| = \frac{1}{2}|-9+4| = \frac{5}{2}$.

आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & 2 & 3/2 & 1 \\ 4 & 7/2 & 3 & 5/2 \end{bmatrix}$.

(ii) $a_{ij} = 2i - j$.

उत्तर-

$a_{11} = 2\times1 - 1 = 2-1 = 1$.
$a_{12} = 2\times1 - 2 = 2-2 = 0$.
$a_{13} = 2\times1 - 3 = 2-3 = -1$.
$a_{14} = 2\times1 - 4 = 2-4 = -2$.

$a_{21} = 2\times2 - 1 = 4-1 = 3$.
$a_{22} = 2\times2 - 2 = 4-2 = 2$.
$a_{23} = 2\times2 - 3 = 4-3 = 1$.
$a_{24} = 2\times2 - 4 = 4-4 = 0$.

$a_{31} = 2\times3 - 1 = 6-1 = 5$.
$a_{32} = 2\times3 - 2 = 6-2 = 4$.
$a_{33} = 2\times3 - 3 = 6-3 = 3$.
$a_{34} = 2\times3 - 4 = 6-4 = 2$.

आव्यूह $= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. निम्नलिखित समीकरणों से x, y तथा z के मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर- $x = 1, y = 4, z = 3.$

(ii) $\begin{bmatrix} x+y & 2 \\ 5+z & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$5 + z = 5$

$z = 5 - 5$

$z = 0.$

$x + y = 6 \quad \text{—— Eq}^{n}\text{-1}$

$xy = 8$

$y = \frac{8}{x} \quad \text{—— Eq}^{n}\text{-2}$

$\text{Eq}^{n}\text{-2}$ in $\text{Eq}^{n}\text{-1}$:-

$$x + \frac{8}{x} = 6$$

$$x^2 + 8 = 6x$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$x^2 - (2+4)x + 8 = 0$$
$$x^2 - 2x - 4x + 8 = 0$$
$$x(x-2) - 4(x-2) = 0$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$

$x = 4, \; x = 2.$

x in Eq^n-2 :-

$$y = \frac{8}{x} = \frac{8}{4} = 2.$$

$$y = \frac{8}{x} = \frac{8}{2} = 4.$$

$x = 4, \; x = 2.$
$y = 2, \; y = 4.$
$z = 0.$

(iii) $\begin{bmatrix} x+y+z \\ x+z \\ y+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$x+y+z = 9 \quad \text{— Eq}^n\text{-1}$$

$$x+z = 5$$

$x = 5 - z$ — Eq^n 2

$y + z = 7$

$y = 7 - z$ — Eq^n 3

Eq^n 2 and Eq^n 3 in Eq^n 1 :-

$x + y + z = 9$

$5 - z + 7 - z + z = 9$

$12 - z = 9$

$-z = 9 - 12$

$-z = -3$

$z = 3.$

z in Eq^n 2 :-

$x = 5 - z$

$x = 5 - 3$

$x = 2.$

z in Eq^n 3 :-

$y = 7 - z$

$y = 7 - 3$

$y = 4.$

$x = 2, y = 4, z = 3.$

7. समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

$x = 5 - z$ — Eq^n - 2

$y + z = 7$

$y = 7 - z$ — Eq^n - 3

Eq^n 2 and Eq^n 3 in Eq^n 1 :-

$x + y + z = 9$

$5 - z + 7 - z + z = 9$

$12 - z = 9$

$-z = 9 - 12$

$-z = -3$

$z = 3.$

z in Eq^n 2 :-

$x = 5 - z$

$x = 5 - 3$

$x = 2.$

z in Eq^n - 3 :-

$y = 7 - z$

$y = 7 - 3$

$y = 4.$

$x = 2, y = 4, z = 3.$

7. समीकरण $\begin{bmatrix} a-b & 2a+c \\ 2a-b & 3c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$

$2a + c = 5$
$2(1) + c = 5$
$c = 5 - 2$
$c = 3.$

$3c + d = 13$
$3(3) + d = 13$
$9 + d = 13$
$d = 13 - 9$
$d = 4.$

$a = 1, b = 2, c = 3, d = 4.$

8. $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ एक वर्ग आव्यूह है यदि

(A) $m < n$
(B) $m > n$
(C) $m = n$ [✓]
(D) इनमें से कोई नहीं।

9. x तथा y के प्रदत्त किन मानों के लिए आव्यूहों के निम्न युग्म समान हैं?

$$\begin{bmatrix} 3x+7 & 5 \\ y+1 & 2-3x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & y-2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

(A) $x = -1/3, y = 7.$
(B) ज्ञात करना सम्भव नहीं है।
(C) $y = 7, x = -2/3.$
(D) $x = -1/3; y = -2/3.$

उत्तर- $x = -1/3$ रखने पर :-

$$3\left(-\frac{1}{3}\right) + 7 = 0$$

$$-\frac{3}{3} + 7 = 0$$

$-1+7=0$
$6 \neq 0.$

$x=-2/3$ रखने पर :-

$3\left(\frac{-2}{3}\right)+7=0$

$\frac{-6}{3}+7=0$

$-2+7=0$
$5 \neq 0$

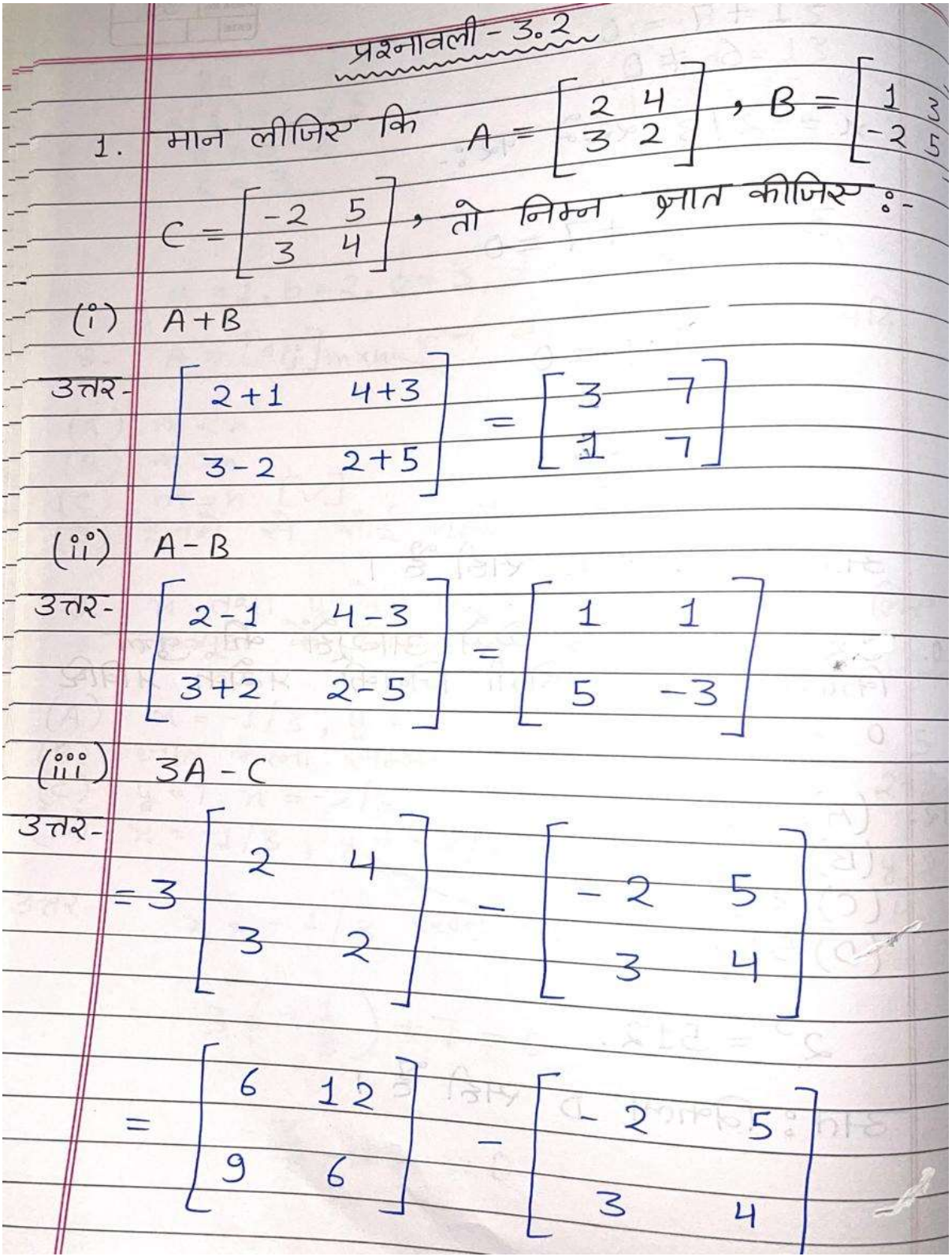
अतः विकल्प B सही है।

10. 3×3 कोटि के ऐसे आव्यूहों की कुल कितनी संख्या होगी जिनकी प्रत्येक प्रविष्टि 0 या 1 है?

(A) 27
(B) 18
(C) 81
(D) 512

$2^9 = 512.$

अतः विकल्प D सही है।



प्रश्नावली - 3.2

1. मान लीजिए कि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, तो निम्न ज्ञात कीजिए :-

(i) $A+B$

उत्तर- $\begin{bmatrix} 2+1 & 4+3 \\ 3-2 & 2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $A-B$

उत्तर- $\begin{bmatrix} 2-1 & 4-3 \\ 3+2 & 2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

(iii) $3A-C$

उत्तर- $= 3\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 6+2 & 12-5 \\ 9-3 & 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

(iv) AB

उत्तर-

$$= \begin{bmatrix} 2\times1+4\times(-2) & 2\times3+4\times5 \\ 3\times1+2\times(-2) & 3\times3+2\times5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-8 & 6+20 \\ 3-4 & 9+10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & 26 \\ -1 & 19 \end{bmatrix}$$

(v) BA

उत्तर-

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1\times2+3\times3 & 1\times4+3\times2 \\ -2\times2+5\times3 & -2\times4+5\times2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+9 & 4+6 \\ -4+15 & -8+10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

2. निम्न को परिकलित कीजिए :-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} a+a & b+b \\ -b+b & a+a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2a \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & b^2+c^2 \\ a^2+c^2 & a^2+b^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2ab & 2bc \\ -2ac & -2ab \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} a^2+b^2+2ab & b^2+c^2+2bc \\ a^2+c^2-2ac & a^2+b^2-2ab \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} (a+b)^2 & (b+c)^2 \\ (a-c)^2 & (a-b)^2 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ 8 & 5 & 16 \\ 2 & 8 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 8 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} -1+12 & 4+7 & -6+6 \\ 8+8 & 5+0 & 16+5 \\ 2+3 & 8+2 & 5+4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 11 & 11 & 0 \\ 16 & 5 & 21 \\ 5 & 10 & 9 \end{bmatrix}$$

(iv) $\begin{bmatrix} \cos^2 x & \sin^2 x \\ \sin^2 x & \cos^2 x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x \\ \cos^2 x & \sin^2 x \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} \cos^2 x + \sin^2 x & \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin^2 x + \cos^2 x & \cos^2 x + \sin^2 x \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. निदर्शित गुणनफल परिकलित कीजिए :-

(i) $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} a \times a + b \times b & a \times (-b) + b \times a \\ -b \times a + a \times b & -b \times (-b) + a \times a \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & -ab + ab \\ -ab + ab & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & b^2 + a^2 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} 1 \times 2 & 1 \times 3 & 1 \times 4 \\ 2 \times 2 & 2 \times 3 & 2 \times 4 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर -

$$\begin{bmatrix} 1\times1+(-2)\times2 & 1\times2+(-2)\times3 & 1\times3+(-2)\times1 \\ 2\times1+3\times2 & 2\times2+3\times3 & 2\times3+3\times1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-4 & 2-6 & 3-2 \\ 2+6 & 4+9 & 6+3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 8 & 13 & 9 \end{bmatrix}$$

(iv) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर -

$$\begin{bmatrix} 2\times1+3\times0+4\times3 & 2\times(-3)+3\times2+4\times0 & 2\times5+3\times4+4\times5 \\ 3\times1+4\times0+5\times3 & 3\times(-3)+4\times2+5\times0 & 3\times5+4\times4+5\times5 \\ 4\times1+5\times0+6\times3 & 4\times(-3)+5\times2+6\times0 & 4\times5+5\times4+6\times5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2+0+12 & -6+6+0 & 10+12+20 \\ 3+0+15 & -9+8+0 & 15+16+25 \\ 4+0+18 & -12+10+0 & 20+20+30 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 14 & 0 & 42 \\ 18 & -1 & 56 \\ 22 & -2 & 70 \end{bmatrix}$$

(v) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} 2\times1+1\times(-1) & 2\times0+1\times2 & 2\times1+1\times1 \\ 3\times1+2\times(-1) & 3\times0+2\times2 & 3\times1+2\times1 \\ -1\times1+1\times(-1) & -1\times0+1\times2 & -1\times1+1\times1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2-1 & 0+2 & 2+1 \\ 3-2 & 0+4 & 3+2 \\ -1-1 & 0+2 & -1+1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(vi) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

उत्तर- $\begin{bmatrix} 3\times2+(-1)\times1+3\times3 & 3\times(-3)+(-1)\times0+3\times1 \\ -1\times2+0\times1+2\times3 & -1\times(-3)+0\times0+2\times1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 6-1+9 & -9-0+3 \\ -2+0+6 & 3+0+2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5+9 & -9+3 \\ -2+6 & 3+2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 14 & -6 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

4. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 5 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 2\\ 1 & -2 & 3\end{bmatrix}$, तो (A+B) तथा (B-C) परिकलित कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि

$A+(B-C)=(A+B)-C$.

उत्तर- A+B :-

$$\begin{bmatrix}1+3 & 2-1 & -3+2\\ 5+4 & 0+2 & 2+5\\ 1+2 & -1+0 & 1+3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ 9 & 2 & 7\\ 3 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

B-C :-

$$\begin{bmatrix}3-4 & -1-1 & 2-2\\ 4-0 & 2-3 & 5-2\\ 2-1 & 0+2 & 3-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & -2 & 0\\ 4 & -1 & 3\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$A + (B - C) = (A + B) - C$

LHS :-

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 2-2 & -3+0 \\ 5+4 & 0-1 & 2+3 \\ 1+1 & -1+2 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$\begin{bmatrix} 4-4 & 1-1 & -1-2 \\ 9-0 & 2-3 & 7-2 \\ 3-1 & -1+2 & 4-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 9 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS

5. यदि

$$A = \begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 7/3 & 2 & 2/3 \end{bmatrix}$$ तथा

$$B = \begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 1 \\ 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 7/5 & 6/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$, तो $3A - 5B$ परिकलित कीजिए ।

उत्तर-

$$3A - 5B$$

$$3\begin{bmatrix} 2/3 & 1 & 5/3 \\ 1/3 & 2/3 & 4/3 \\ 7/3 & 2 & 2/3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2/5 & 3/5 & 1 \\ 1/5 & 2/5 & 4/5 \\ 7/5 & 6/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 3-3 & 5-5 \\ 1-1 & 2-2 & 4-4 \\ 7-7 & 6-6 & 2-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

6. सरल कीजिए :-

$$\cos\theta \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि

(i) $X+Y=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$X+Y=\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X-Y=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

+

$$2X=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$2X + 3Y = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{—— } Eq^n - 1$$

$$3X + 2Y = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{—— } Eq^n - 2$$

$Eq^n - 1 \times 3$

&

$Eq^n - 2 \times 2$

$$6X + 9Y = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{— Eq}^n - 3$$

$$-\ 6X + 4Y = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{— Eq}^n - 4$$

$$- \quad -$$

$$5Y = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ 14 & -10 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 2/5 & 13/5 \\ 14/5 & -2 \end{bmatrix}$$

Y in $\text{Eq}^n - 3$:-

$$6X + 9Y = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6X + 9\begin{bmatrix} 2/5 & 13/5 \\ 14/5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6X = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 12 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18/5 & 117/5 \\ 126/5 & -18 \end{bmatrix}$$

$$6X = \begin{bmatrix} 12/5 & -72/5 \\ -66/5 & 18 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2/5 & -12/5 \\ -11/5 & 3 \end{bmatrix}$$

8. X तथा Y ज्ञात कीजिए यदि $Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

तथा $2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$2X + Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

9. x तथा y ज्ञात कीजिए यदि $2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$2+y = 5$$
$$y = 5-2$$
$$y = 3.$$

$$2x + 2 = 8$$
$$2x = 8-2$$
$$2x = 6$$
$$x = 3.$$

10. प्रदत्त समीकरण को x, y, z तथा t के लिए हल कीजिए यदि

$$2\begin{bmatrix} x & z \\ y & t \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

उत्तर-

$$\begin{bmatrix} 2x & 2z \\ 2y & 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x+3 & 2z-3 \\ 2y+0 & 2t+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 15 \\ 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$2x+3=9$
$2x=9-3$
$2x=6$
$x=3.$

$2z-3=15$
$2z=15+3$
$2z=18$
$z=9.$

$2y=12$
$y=6.$

$2t+6=18$
$2t=18-6$
$2t=12$
$t=6.$

11. यदि $x\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$\begin{bmatrix}2x\\3x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-y\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2x-y\\3x+y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2x - y = 10 \\ + \quad 3x + y = 5 \\ \hline 5x = 15 \end{array}$$

$$x = 3.$$

$$3x + y = 5$$
$$3(3) + y = 5$$
$$9 + y = 5$$
$$-y = 9 - 5$$
$$-y = 4$$
$$y = -4.$$

12. यदि $3\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{bmatrix}$ है, तो x, y, z तथा w के मानों को ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\begin{bmatrix} 3x & 3y \\ 3z & 3w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+4 & 6+x+y \\ -1+z+w & 2w+3 \end{bmatrix}$

$$3x = x + 4$$
$$3x - x = 4$$
$$2x = 4$$
$$x = 2.$$

$$3y = 6 + x + y$$
$$3y - y = 6 + (2)$$
$$2y = 8$$

$y = 4$.

$3z = -1 + z + w$

$3z - z = -1 + 3$

$2z = 2$

$z = 1$.

$3w = 2w + 3$

$3w - 2w = 3$

$w = 3$.

13. यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है,

तो सिद्ध कीजिए कि $F(x)\,F(y) = F(x+y)$.

उत्तर- $LHS = F(x)\,F(y)$

$$= \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos x \cos y - \sin x \sin y + 0 & \\ \sin x \cos y + \cos x \sin y + 0 & \\ 0 + 0 + 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\cos x \sin y - \sin x \cos y + 0 \\ -\sin x \sin y + \cos x \cos y + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 1 \end{matrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$= F(x+y) = RHS.$

14. दर्शाइए कि

(i) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

उत्तर- LHS :-

$$= \begin{bmatrix} 5\times2+(-1)\times3 & 5\times1+(-1)\times4 \\ 6\times2+7\times3 & 6\times1+7\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 33 & 34 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$= \begin{bmatrix} 2\times5+1\times6 & 2\times(-1)+1\times7 \\ 3\times5+4\times6 & 3\times(-1)+4\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 39 & 25 \end{bmatrix}$$

अत: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

उत्तर- LHS :-

$$\begin{bmatrix} 1\times(-1)+2\times0+3\times2 & 1\times1+2\times(-1)+3\times3 & 1\times0+2\times1+3\times4 \\ 0\times(-1)+1\times0+0\times2 & 0\times1+1\times(-1)+0\times3 & 0\times0+1\times1+0\times4 \\ 1\times(-1)+1\times0+0\times2 & 1\times1+1\times(-1)+0\times3 & 1\times0+1\times1+0\times4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 14 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$\begin{bmatrix} -1\times1+1\times0+0\times1 & -1\times2+1\times1+0\times1 & -1\times3+1\times0+0\times0 \\ 0\times1+(-1)\times0+1\times1 & 0\times2+(-1)\times1+1\times1 & 0\times3+(-1)\times0+1\times0 \\ 2\times1+3\times0+4\times1 & 2\times2+3\times1+4\times1 & 2\times3+3\times0+4\times0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

अतः $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \neq$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ है तो $A^2 - 5A + 6I$, का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\times2+0\times2+1\times1 & 2\times0+0\times1+1\times(-1) \\ 2\times2+1\times2+3\times1 & 2\times0+1\times1+3\times(-1) \\ 1\times2+(-1)\times2+0\times1 & 1\times0+(-1)\times1+0\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2\times1+0\times3+1\times0 \\ 2\times1+1\times3+3\times0 \\ 1\times1+(-1)\times3+0\times0 \end{matrix}\Bigg]$$

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$A^2 - 5A + 6I$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 9 & -2 & 5 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-10+6 & -1-0+0 & 2-5+0 \\ 9-10+0 & -2-5+6 & 5-15+0 \\ 0-5+0 & -1+5+0 & -2-0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & -1 & -10 \\ -5 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

16. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $A^3 - 6A^2 + 7A + 2I = 0$.

उत्तर- $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+0\times0+2\times2 & 1\times0+0\times2+2\times0 & 1\times2+0\times1+2\times3 \\ 0\times1+2\times0+1\times2 & 0\times0+2\times2+1\times0 & 0\times2+2\times1+1\times3 \\ 2\times1+0\times0+3\times2 & 2\times0+0\times2+3\times0 & 2\times2+0\times1+3\times3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5\times1+0\times0+8\times2 & 5\times0+0\times2+8\times0 \\ 2\times1+4\times0+5\times2 & 2\times0+4\times2+5\times0 \\ 8\times1+0\times0+13\times2 & 8\times0+0\times2+13\times0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5\times2+0\times1+8\times3 \\ 2\times2+4\times1+5\times3 \\ 8\times2+0\times1+13\times3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 6A^2 - 7A + 2I = 0$$

LHS:-

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$+ 7\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21-30+7+2 & 0-0+0+0 \\ 12-12+0+0 & 8-24+14+2 \\ 34-48+14+0 & 0-0+0+0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 34-48+14+0 \\ 23-30+7+0 \\ 55-78+21+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= 0 = RHS.$

17. यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

एवं $A^2 = kA - 2I$ हो, तो k ज्ञात कीजिए

उत्तर- $A^2 = kA - 2I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3\times3+(-2)\times4 & 3\times(-2)+(-2)\times(-2) \\ 4\times3+(-2)\times4 & 4\times(-2)+(-2)\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3k & -2k \\ 4k & -2k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k-2 & -2k \\ 4k & -2k-2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow 4k = 4$

$\Rightarrow k = 1.$

18. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$ तथा I कोटि 2 का एक तत्समक आव्यूह है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$I + A = (I - A)\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

उत्तर- LHS :-

$= I + A$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha/2 \\ \tan\alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\tan \alpha/2 \\ \tan \alpha/2 & 1 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$= (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha/2 \\ \tan \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\tan \alpha/2 \\ \tan \alpha/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha/2 \\ -\tan \alpha/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha + \tan \alpha/2 \sin \alpha & -\sin \alpha + \tan \alpha/2 \cos \alpha \\ -\tan \alpha/2 \cos \alpha + \sin \alpha & \tan \alpha/2 \sin \alpha + \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos \alpha + \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha & -\sin \alpha + \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \cos \alpha \\ -\frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \cos \alpha + \sin \alpha & \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \sin \alpha + \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos\alpha\cos\alpha/2 + \sin\alpha/2\sin\alpha}{\cos\alpha/2} & \frac{-\sin\alpha\cos\alpha/2 + \sin\alpha/2\cos\alpha}{\cos\alpha/2} \\ \frac{-\cos\alpha\sin\alpha/2 + \cos\alpha/2\sin\alpha}{\cos\alpha/2} & \frac{\sin\alpha\sin\alpha/2 + \cos\alpha/2\cos\alpha}{\cos\alpha/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\cos(\alpha - \alpha/2)}{\cos\alpha/2} & \frac{-\sin(\alpha - \alpha/2)}{\cos\alpha/2} \\ \frac{\sin(\alpha - \alpha/2)}{\cos\alpha/2} & \frac{\cos(\alpha - \alpha/2)}{\cos\alpha/2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\alpha}{2} \\ \tan\frac{\alpha}{2} & 1 \end{bmatrix} = \text{LHS}.$$

19. किसी व्यापार संघ के पास 30000 Rs का कोष है जिसे दो भिन्न-भिन्न प्रकार के बांडों में निवेशित करना है। प्रथम बांड पर 5% वार्षिक तथा द्वितीय बांड पर 7% वार्षिक ब्याज प्राप्त होता है। आव्यूह गुणन के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित कीजिए कि 30000 Rs के कोष को दो प्रकार के बांडों में निवेश

करने के लिए किस प्रकार बाँटें जिससे व्यापार संघ को प्राप्त कुल वार्षिक ब्याज
(a) ₹ 1800 हो ।
(b) ₹ 2000 है ।

उत्तर- माना प्रथम बांड पर निवेश की गई राशि = ₹ x
∴ द्वितीय बांड पर निवेश की गई राशि = ₹ $(30000 - x)$

(a) बांडों मे निवेश (Rs में)

$$\begin{bmatrix} x & 30000 - x \end{bmatrix}$$

वार्षिक ब्याज दर $\begin{bmatrix} 5\% \\ 7\% \end{bmatrix}$

वार्षिक ब्याज (Rs में) $\begin{bmatrix} 1800 \end{bmatrix}$

$$x \times 5\% + (30000 - x) \times 7\% = 1800$$

$$\frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x) \times 7\% = 1800$$

$$5x + 210000 - 7x = 180000$$

$$-2x = -30000$$

$$x = 15000$$

प्रथम बांड = 15000 ₹

द्वितीय बांड = 15000 ₹

(b) बांडों में निवेश (Rs में)

$[x \quad 30000 - x]$

वार्षिक ब्याज दर $\begin{bmatrix} 5\% \\ 7\% \end{bmatrix}$

वार्षिक ब्याज (Rs में) $[2000]$

$x \times 5\% + (30000 - x) \times 7\% = 2000$

$\frac{5x}{100} + \frac{7}{100}(30000 - x) = 2000$

$5x + 210000 - 7x = 200000$

$-2x = -10000$

$x = 5000$

प्रथम बांड = 5000 ₹

द्वितीय बांड = 25000 ₹

20. किसी स्कूल की पुस्तकों की दुकान में 10 दर्जन ससायन विज्ञान, 8 दर्जन भौतिक विज्ञान तथा 10 दर्जन अर्थशास्त्र की पुस्तकें हैं। इन पुस्तकों का विक्रय मूल्य क्रमशः ₹ 80, ₹ 60 तथा ₹ 40 प्रति पुस्तक है। आव्यूह बीजगणित के प्रयोग द्वारा ज्ञात करें कि सभी पुस्तकों को बेचने से दुकान को कुल कितनी धनराशि प्राप्त होगी।

उत्तर- पुस्तक की सं. $\begin{bmatrix} 120 & 96 & 120 \end{bmatrix}$

विक्रय मूल्य प्रति पुस्तक $\begin{bmatrix} 80 \\ 60 \\ 40 \end{bmatrix}$

कुल धनराशि (Rs में) $[x]$

$120 \times 80 + 96 \times 60 + 120 \times 40 = x$

$x = 9600 + 5760 + 4800$

$x = ₹ 20160.$

21. $PY + WY$ के परिभाषित होने के लिए n, k तथा p पर क्या प्रतिबंध होगा?

(A) $k = 3, p = n$

(B) k स्वेच्छ है, $p = 2$.

(C) p स्वेच्छ है, $k = 3$.

(D) $k = 2, p = 3$.

उत्तर- P की कोटि = p × k

Y की कोटि = 3 × k

PY के लिए k = 3, ∴ PY की कोटि p × k.

W की कोटि = n × 3

Y की कोटि = 3 × k

WY की कोटि = n × k.

PY + WY ⇒ p × k = n × k

⇒ p = n

अतः विकल्प (A) सही है।

22. यदि n = p, तो आव्यूह 7X - 52 की कोटि है

(A) p × 2
(B) 2 × n
(C) n × 3
(D) p × n

उत्तर- आव्यूहों को जोड़ने या घटाने पर उनकी कोटि समान रहती है।

7X - 52 की कोटि = X की कोटि = Z की कोटि
= 2 × n.

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित आव्यूहों में से प्रत्येक का परिवर्त ज्ञात कीजिए :

(i) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1/2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

उत्तर- $\begin{bmatrix} 5 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$.

(ii) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

उत्तर- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

(iii) $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 \\ \sqrt{3} & 5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

उत्तर- $\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 6 & -1 \end{bmatrix}$.

2. यदि $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

हैं तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$

उत्तर-

LHS :-

$$= \begin{bmatrix} -1-4 & 2+1 & 3-5 \\ 5+1 & 7+2 & 9+0 \\ -2+1 & 1+3 & 1+1 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 6 & 9 & 9 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$= A' + B'$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1-4 & 5+1 & -2+1 \\ 2+1 & 7+2 & 1+3 \\ 3-5 & 9+0 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 & 6 & -1 \\ 3 & 9 & 4 \\ -2 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS.

(ii) $(A-B)' = A' - B'$.

उत्तर- LHS :-

$$= (A-B)'$$

$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 2-1 & 3+5 \\ 5-1 & 7-2 & 9-0 \\ -2-1 & 1-3 & 1-1 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 4 & 5 & 9 \\ -3 & -2 & 0 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$= A' - B'$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+4 & 5-1 & -2-1 \\ 2-1 & 7-2 & 1-3 \\ 3+5 & 9-0 & 1-1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS.

3. यदि $A' = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ है

तो सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A+B)' = A' + B'$

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

LHS :-

$$= \begin{bmatrix} 3-1 & -1+2 & 0+1 \\ 4+1 & 2+2 & 1+3 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

RHS :-

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3-1 & 4+1 \\ -1+2 & 2+2 \\ 0+1 & 1+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS.

(i) $(A-B)' = A' - B'$.

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & -1-2 & 0-1 \\ 4-1 & 2-2 & 1-3 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

RHS:-

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+1 & 4-1 \\ -1-2 & 2-2 \\ 0-1 & 1-3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS

4. यदि $A' = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो

तो $(A+2B)'$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (A + 2B)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)'$$

$$= \left(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right)'$$

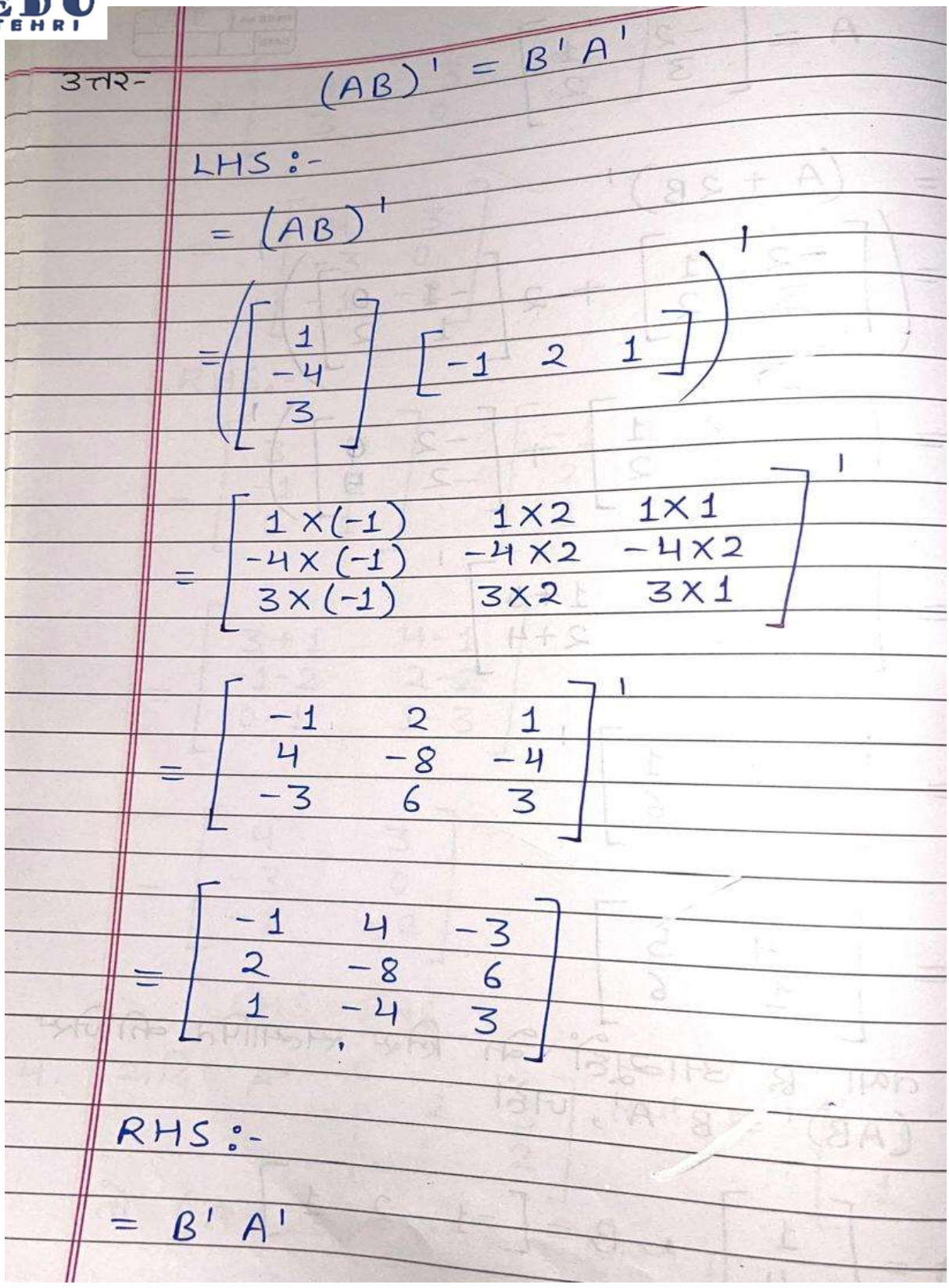
$$= \begin{bmatrix} -2-2 & 1+0 \\ 3+2 & 2+4 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

5. A तथा B आव्यूहों के लिए सत्यापित कीजिए कि $(AB)' = B'A'$, जहाँ

(i) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.



उत्तर- $(AB)' = B'A'$

LHS :-

$= (AB)'$

$= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right)'$

$= \begin{bmatrix} 1\times(-1) & 1\times2 & 1\times1 \\ -4\times(-1) & -4\times2 & -4\times2 \\ 3\times(-1) & 3\times2 & 3\times1 \end{bmatrix}'$

$= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}'$

$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

RHS :-

$= B'A'$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \times 1 & -1 \times (-4) & -1 \times 3 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-4) & 2 \times 3 \\ 1 \times 1 & 1 \times (-4) & 1 \times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$.

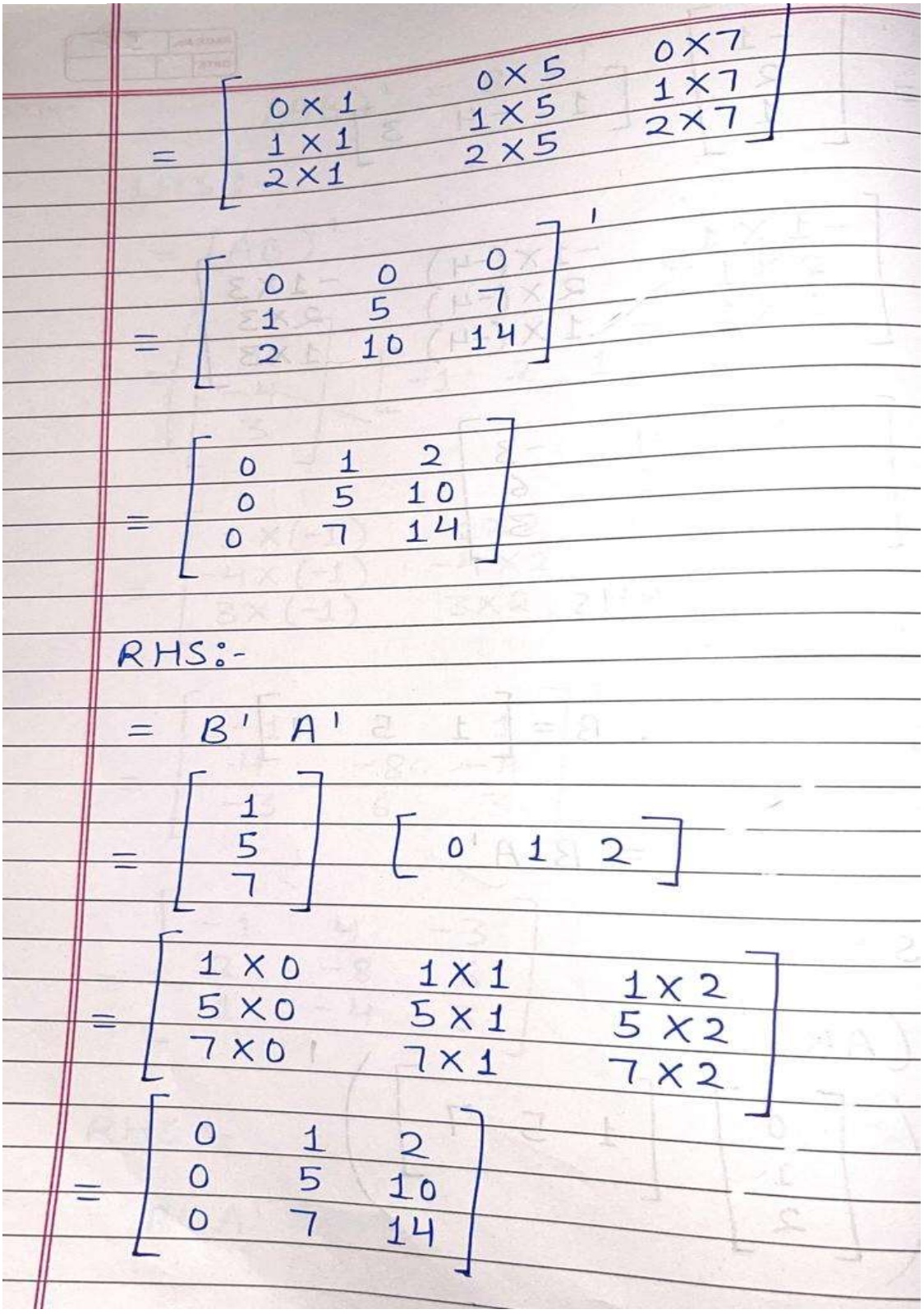
तर-

$(AB)' = B'A'$

LHS :-

$= (AB)'$

$= \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} \right)'$



$$= \begin{bmatrix} 0\times1 & 0\times5 & 0\times7 \\ 1\times1 & 1\times5 & 1\times7 \\ 2\times1 & 2\times5 & 2\times7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 7 \\ 2 & 10 & 14 \end{bmatrix}'$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

RHS:-

$$= B'\,A'$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times0 & 1\times1 & 1\times2 \\ 5\times0 & 5\times1 & 5\times2 \\ 7\times0 & 7\times1 & 7\times2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 7 & 14 \end{bmatrix}$$

LHS = RHS.

6.(i) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$.

उत्तर- $A' = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$A'A = I$

LHS :- $= A'A$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos\alpha \times \cos\alpha - \sin\alpha \times (-\sin\alpha) & \\ \sin\alpha \times \cos\alpha + \cos\alpha \times (-\sin\alpha) & \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} \cos\alpha \times \sin\alpha - \sin\alpha \times \cos\alpha \\ \sin\alpha \times \sin\alpha + \cos\alpha \times \cos\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= I = RHS.$

LHS = RHS

(ii) यदि $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$ हो तो सत्यापित कीजिए कि $A'A = I$.

उत्तर- $A' = \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

$A'A = I$

LHS :- $= A'A$

$= \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

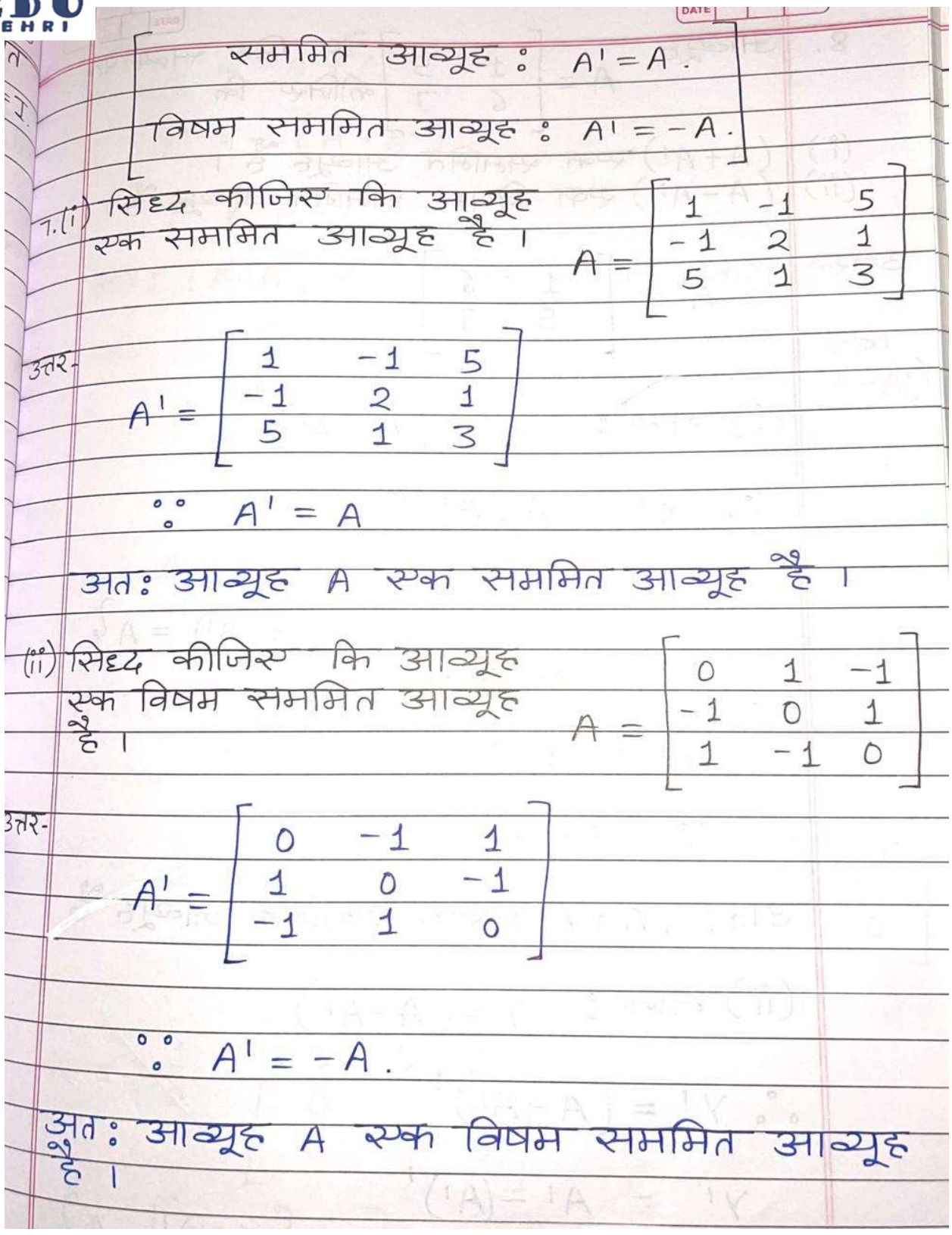
$= \begin{bmatrix} \sin\alpha \times \sin\alpha - \cos\alpha \times (-\cos\alpha) & \sin\alpha \times \cos\alpha - \cos\alpha \times \sin\alpha \\ \cos\alpha \times \sin\alpha + \sin\alpha \times (-\cos\alpha) & \cos\alpha \times \cos\alpha + \sin\alpha \times \sin\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha & \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos\alpha & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= I = RHS.$

$LHS = RHS.$



सममित आव्यूह : $A' = A$.

विषम सममित आव्यूह : $A' = -A$.

7.(i) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ एक सममित आव्यूह है।

उत्तर-

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\because A' = A$

अतः आव्यूह A एक सममित आव्यूह है।

(ii) सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर-

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\because A' = -A$.

अतः आव्यूह A एक विषम सममित आव्यूह है।

8. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ के लिए सत्यापित कीजिए कि

(i) $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।
(ii) $(A - A')$ एक विषम सममित आव्यूह है।

उत्तर- $A' = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

(i) माना : $X = (A + A')$

$\therefore X' = (A + A')'$

$X' = A' + (A')'$ $\{(A')' = A\}$

$X' = A' + A$

$X' = A + A'$

$\because X' = X$

अतः $(A + A')$ एक सममित आव्यूह है।

(ii) माना : $Y = (A - A')$

$\therefore Y' = (A - A')'$

$Y' = A' - (A')'$

$Y' = A' - A$ $\{(A')' = A\}$

$Y' = -A + A'$

$Y' = -(A + A')$

$\therefore Y' = -Y$

अतः $(A - A')$ एक विषम: सममित आव्यूह है।

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$ तो $1/2\,(A + A')$ ज्ञात कीजिए तथा $1/2\,(A - A')$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

माना : $X = \frac{1}{2}(A + A')$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

माना : $Y = \frac{1}{2}(A - A')$

$$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 2a & 2b \\ -2a & 0 & 2c \\ -2b & -2c & 0 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}.$$

10. निम्न आव्यूहों को एक सममित आव्यूह तथा एक विषम सममित आव्यूह के योगफल के रूप में व्यक्त कीजिए :-

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

माना : $P = \frac{1}{2}(A + A')$

$$P = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right]$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = P$$

$\because P' = P$

अतः P एक सममित आव्यूह है।

माना: $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$Q = \frac{1}{2}\left[\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}\right]$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

$\because Q = -Q$

अत : Q एक विषम समामित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

उत्तर- $A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$

माना : $P = \frac{1}{2}(A + A')$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 12 & -4 & 4 \\ -4 & 6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = P.$$

$\therefore P' = P$

अतः P एक सममित आव्यूह है।

माना: $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$= -Q.$

$\because Q' = -Q$.

अत: Q एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(iii) $$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

उत्तर- $$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

माना : $P = \frac{1}{2}(A + A')$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -5/2 \\ 1/2 & -2 & -2 \\ -5/2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -5/2 \\ 1/2 & -2 & -2 \\ -5/2 & -2 & 2 \end{bmatrix}'$$

$$P' = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -5/2 \\ 1/2 & -2 & -2 \\ -5/2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = P.$$

$\therefore P' = P$

अत: P एक सममित आव्यूह है ।

माना: $Q = \frac{1}{2}(A - A')$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 3/2 \\ -5/2 & 0 & 3 \\ -3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 3/2 \\ -5/2 & 0 & 3 \\ -3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & -3/2 \\ 5/2 & 0 & -3 \\ 3/2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 3/2 \\ -5/2 & 0 & 3 \\ -3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -Q$$

$\because Q' = -Q$.

अतः Q एक विषम समामित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1/2 & -5/2 \\ 1/2 & -2 & -2 \\ -5/2 & -2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5/2 & 3/2 \\ -5/2 & 0 & 3 \\ -3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(iv) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

उत्तर-

$$A = \frac{1}{2}(A + A') + \frac{1}{2}(A - A')$$

माना : $P = \frac{1}{2}(A + A')$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = P$$

$\because P' = P$

अतः P एक सममित आव्यूह है।

$$Q = \frac{1}{2}(A - A')$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= -Q.$$

$\therefore Q' = -Q.$

अतः Q एक विषम सममित आव्यूह है।

इसप्रकार, $A = P + Q$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

प्रश्न-11: यदि A तथा B समान कोटि के सममित आव्यूह हैं तो $AB - BA$ एक

(A) विषम सममित आव्यूह है।
(B) सममित आव्यूह है।
(C) शून्य आव्यूह है।
(D) तत्समक आव्यूह है।

उत्तर-

$$(AB - BA)' = (AB)' - (BA)'$$

$$= B'A' - A'B'$$

$$= BA - AB$$

$$= -(AB - BA)$$

$$= (AB - BA)'$$

$= -(AB - BA)$

इसलिए $(AB - BA)$ एक विषम सममित आव्यूह है।

अतः विकल्प (A) सही है।

प्रश्न-12: यदि $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ तो $A + A' = I$ यदि α का मान है:

(A) $\pi/6$ (B) $\pi/3$ (C) π (D) $3\pi/2$.

उत्तर- दिया है: $A + A' = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cos\alpha & 0 \\ 0 & 2\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2\cos\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$.

अतः विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 3.4

प्रश्न-1: आव्यूह A तथा B एक दूसरे के व्युत्क्रम होंगे केवल यदि

(A) $AB = BA$.

(B) $AB = BA = 0$.

(C) $AB = 0, BA = I$.

(D) $AB = BA = I$.

उत्तर- $\because AA^{-1} = I$

$\therefore AB = BA = I$

अतः विकल्प (D) सही है।