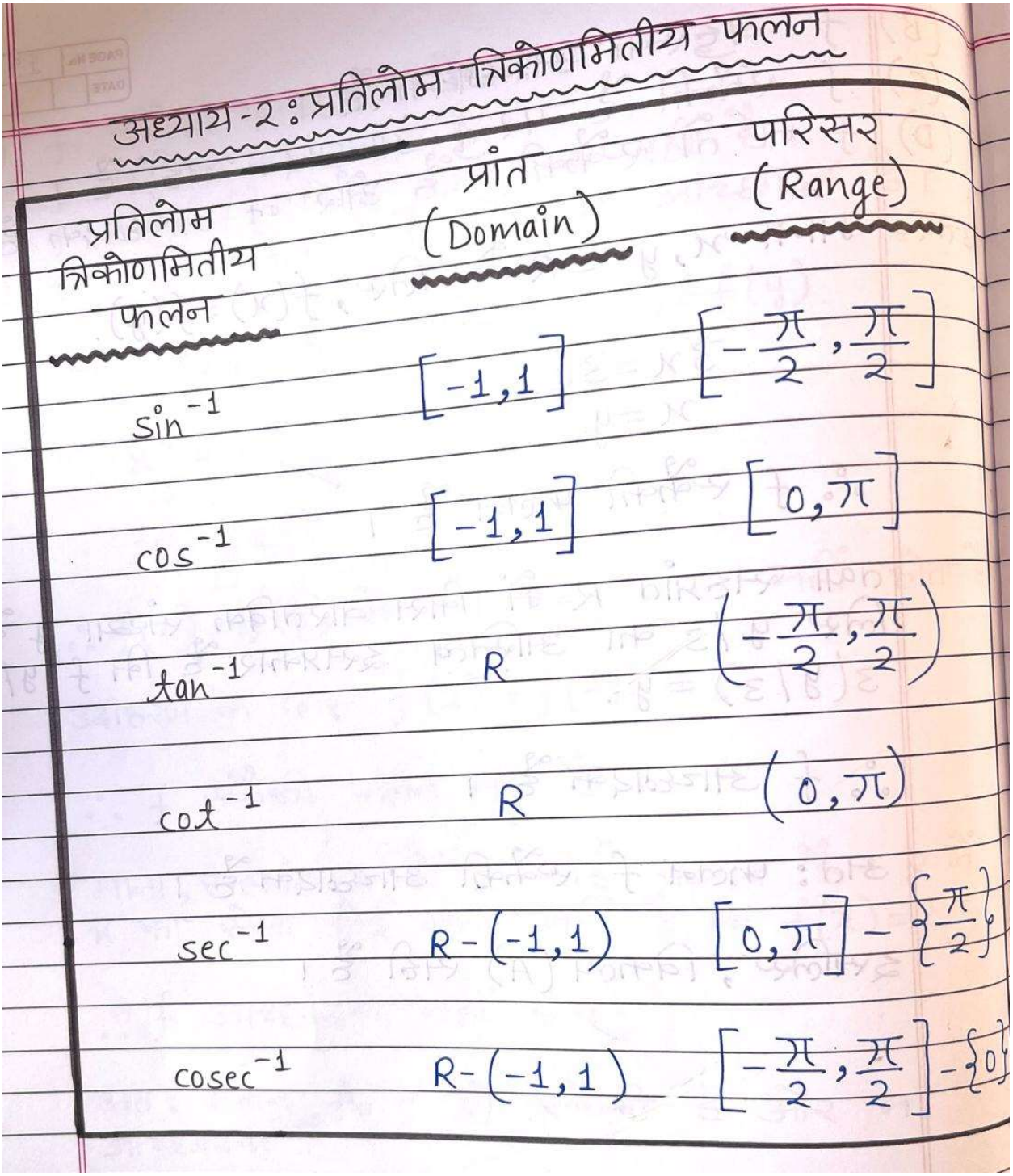


अध्याय-2 : प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन	प्रांत (Domain)	परिसर (Range)
$\sin^{-1}$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1}$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1}$	R	$(0, \pi)$
$\sec^{-1}$	$R-(-1, 1)$	$[0, \pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\operatorname{cosec}^{-1}$	$R-(-1, 1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित के मुख्य मानों को ज्ञात कीजिए :-

प्रश्न-1: $\sin^{-1}(-1/2)$.

उत्तर- माना $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$.

$\therefore \sin y = -\frac{1}{2}$

$\sin y = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\because \sin^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है और $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ है।

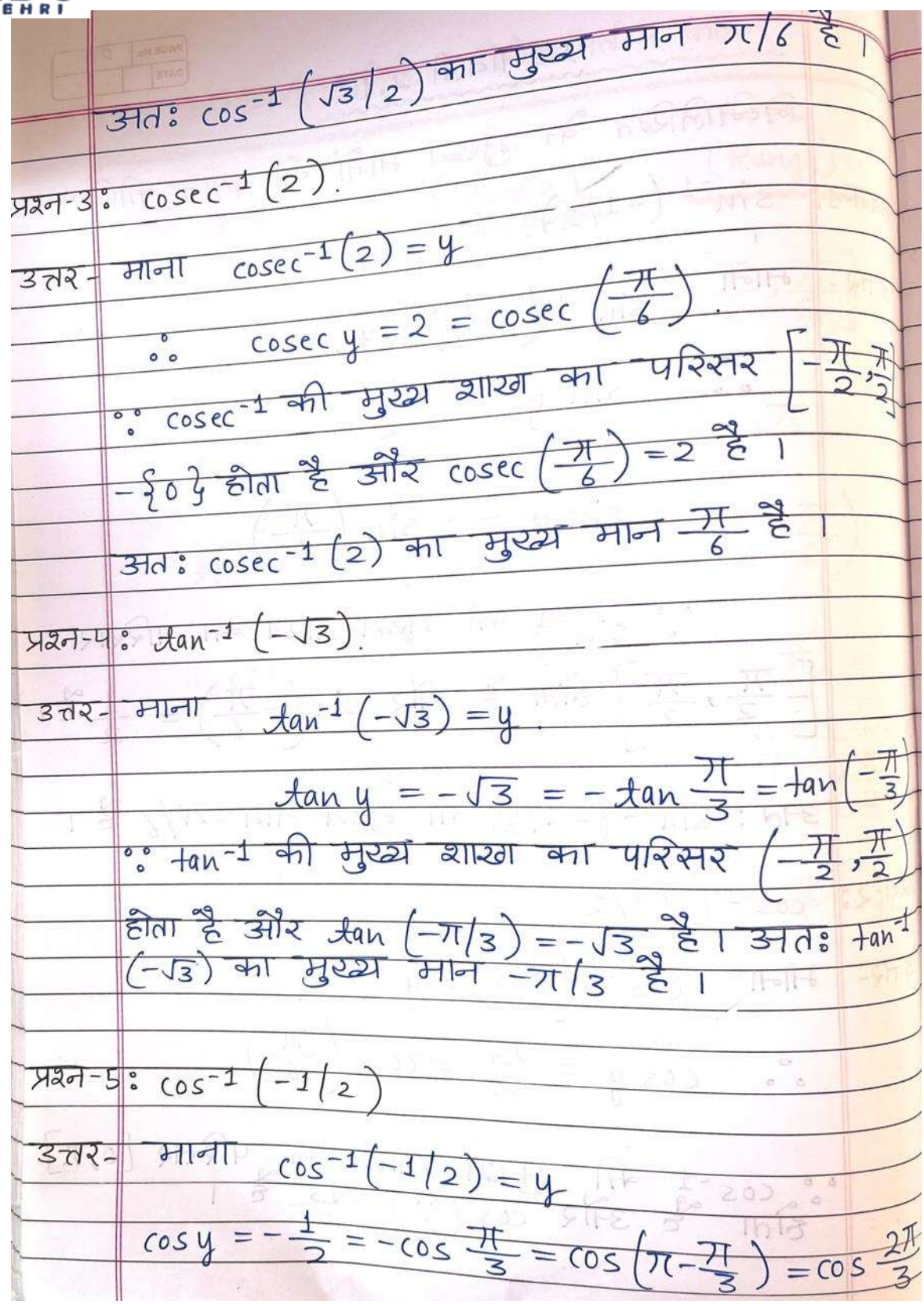
अतः $\sin^{-1}(-1/2)$ का मुख्य मान $-\pi/6$ है।

प्रश्न-2: $\cos^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right)$

उत्तर- माना $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$

$\therefore \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$\because \cos^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ है।



अतः $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$ का मुख्य मान $\pi/6$ है।

प्रश्न-3: $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$.

उत्तर- माना $\operatorname{cosec}^{-1}(2) = y$

$\therefore \operatorname{cosec} y = 2 = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$\because \operatorname{cosec}^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $-\{0\}$ होता है और $\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$ है।

अतः $\operatorname{cosec}^{-1}(2)$ का मुख्य मान $\frac{\pi}{6}$ है।

प्रश्न-4: $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$.

उत्तर- माना $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = y$.

$$\tan y = -\sqrt{3} = -\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$\because \tan^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$ है। अतः $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ का मुख्य मान $-\pi/3$ है।

प्रश्न-5: $\cos^{-1}(-1/2)$

उत्तर- माना $\cos^{-1}(-1/2) = y$

$$\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$$

∵ $\cos^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos(2\pi/3) = -1/2$ है।

अतः $\cos^{-1}(-1/2)$ का मुख्य मान $2\pi/3$ है।

प्रश्न-6: $\tan^{-1}(-1)$.

उत्तर- माना $\tan^{-1}(-1) = y$

$$\tan y = -1 = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

∵ $\tan^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ होता है और $\tan(-\pi/4) = -1$ है।

अतः $\tan^{-1}(-1)$ का मुख्य मान $-\pi/4$ है।

प्रश्न-7: $\sec^{-1}(2/\sqrt{3})$.

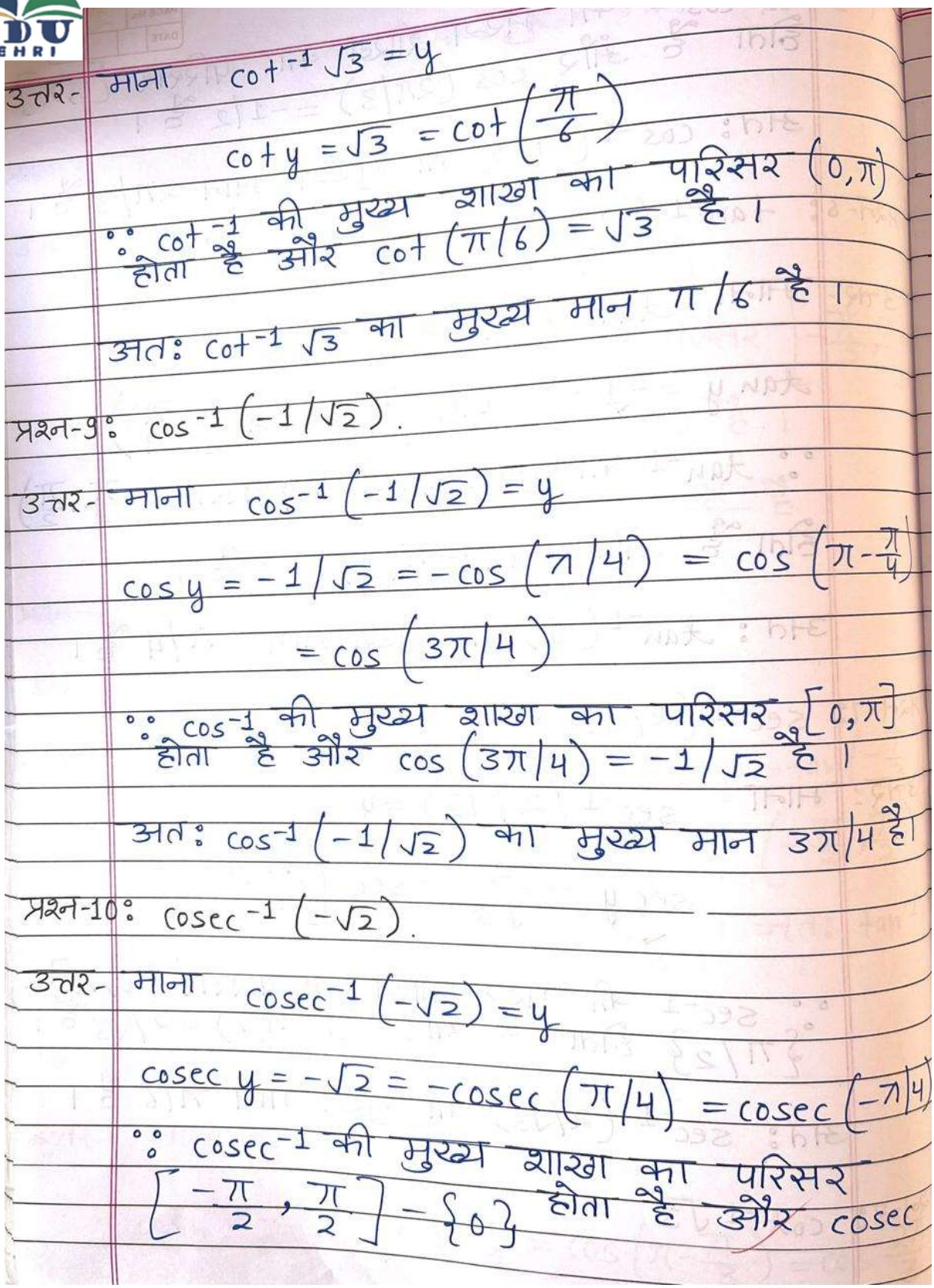
उत्तर- माना $\sec^{-1}(2/\sqrt{3}) = y$

$$\sec y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sec\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

∵ $\sec^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi] - \{\pi/2\}$ होता है और $\sec(\pi/6) = 2/\sqrt{3}$ है।

अतः $\sec^{-1}(2/\sqrt{3})$ का मुख्य मान $\pi/6$ है।

प्रश्न-8: $\cot^{-1}\sqrt{3}$.



उत्तर- माना $\cot^{-1}\sqrt{3} = y$

$\cot y = \sqrt{3} = \cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$

∵ $\cot^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $(0, \pi)$ होता है और $\cot(\pi/6) = \sqrt{3}$ है।

अतः $\cot^{-1}\sqrt{3}$ का मुख्य मान $\pi/6$ है।

प्रश्न-9: $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$.

उत्तर- माना $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2}) = y$

$\cos y = -1/\sqrt{2} = -\cos(\pi/4) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \cos(3\pi/4)$

∵ $\cos^{-1}$ की मुख्य शाखा का परिसर $[0, \pi]$ होता है और $\cos(3\pi/4) = -1/\sqrt{2}$ है।

अतः $\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})$ का मुख्य मान $3\pi/4$ है।

प्रश्न-10: $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$.

उत्तर- माना $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2}) = y$

$\text{cosec}\, y = -\sqrt{2} = -\text{cosec}(\pi/4) = \text{cosec}(-\pi/4)$

∵ cosec^{-1} की मुख्य शाखा का परिसर $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$ होता है और cosec

$(-\pi/4) = -\sqrt{2}$ है।

अतः $\text{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ का मुख्य मान $-\pi/4$ है।

प्रश्न-11 : $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}(-1/2) + \sin^{-1}(-1/2)$.

उत्तर- माना $\tan^{-1}(1) = x$

$$\tan x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}.$$

माना $\cos^{-1}(-1/2) = y$

$$\cos y = -1/2 = -\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

माना $\sin^{-1}(-1/2) = z$

$$\sin z = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

अब, $\tan^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{3\pi + 8\pi - 2\pi}{12}$$

$= \frac{9\pi}{12}$.

$= \frac{3\pi}{4}$.

प्रश्न-12: $\cos^{-1}(1/2) + 2\sin^{-1}(1/2)$.

उत्तर- माना $\cos^{-1}(1/2) = x$

$\cos x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$.

माना $\sin^{-1}(1/2) = y$

$\sin y = 1/2 = \sin \pi/6$.

अब, $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{\pi}{3} + 2 \times \frac{\pi}{6}$

$= \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$.

प्रश्न-13 : यदि $\sin^{-1} x = y$ तो

(A) $0 \le y \le \pi$

(B) $-\pi/2 \le y \le \pi/2$

(C) $0 < y < \pi$

(D) $-\pi/2 < y < \pi/2$.

उत्तर- ~~$\sin y$~~ $\sin^{-1} x = y$

$\because -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\because \sin^{-1}$ की मुख्य परिसर $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ होता है

प्रश्न-14 : $\tan^{-1}\sqrt{3} - \sec^{-1}(-2)$ का बराबर है :

उत्तर- माना : $\tan^{-1}\sqrt{3} = x$

$\tan x = \sqrt{3} = \tan \pi/3$

माना : $\sec^{-1}(-2) = y$

$\sec y = -2 = -\sec \pi/3$

$= \sec(\pi - \pi/3) = \sec 2\pi/3$

$= \pi/3 - 2\pi/3 = -\pi/3$

विकल्प (B) सही है।

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न-1: $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$.

उत्तर- माना $\sin^{-1}x = \theta$

$\therefore x = \sin\theta$

$RHS = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$

$= \sin^{-1}(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$

$= 3\theta$

$= 3\sin^{-1}x = LHS.$

प्रश्न-2: $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$.

उत्तर- माना $\cos^{-1}x = \theta$

$\therefore x = \cos\theta$

$RHS = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$

$= \cos^{-1}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$

$= \cos^{-1}(\cos 3\theta)$

$= 3\theta$

$= 3\cos^{-1}x = LHS.$

प्रश्न-3: $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

उत्तर- माना: $x = \tan\theta$

$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

$= \tan^{-1} \dfrac{\quad}{\tan\theta}$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{\sec\theta - 1}{\tan\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\dfrac{2\sin^2\theta/2}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right)$

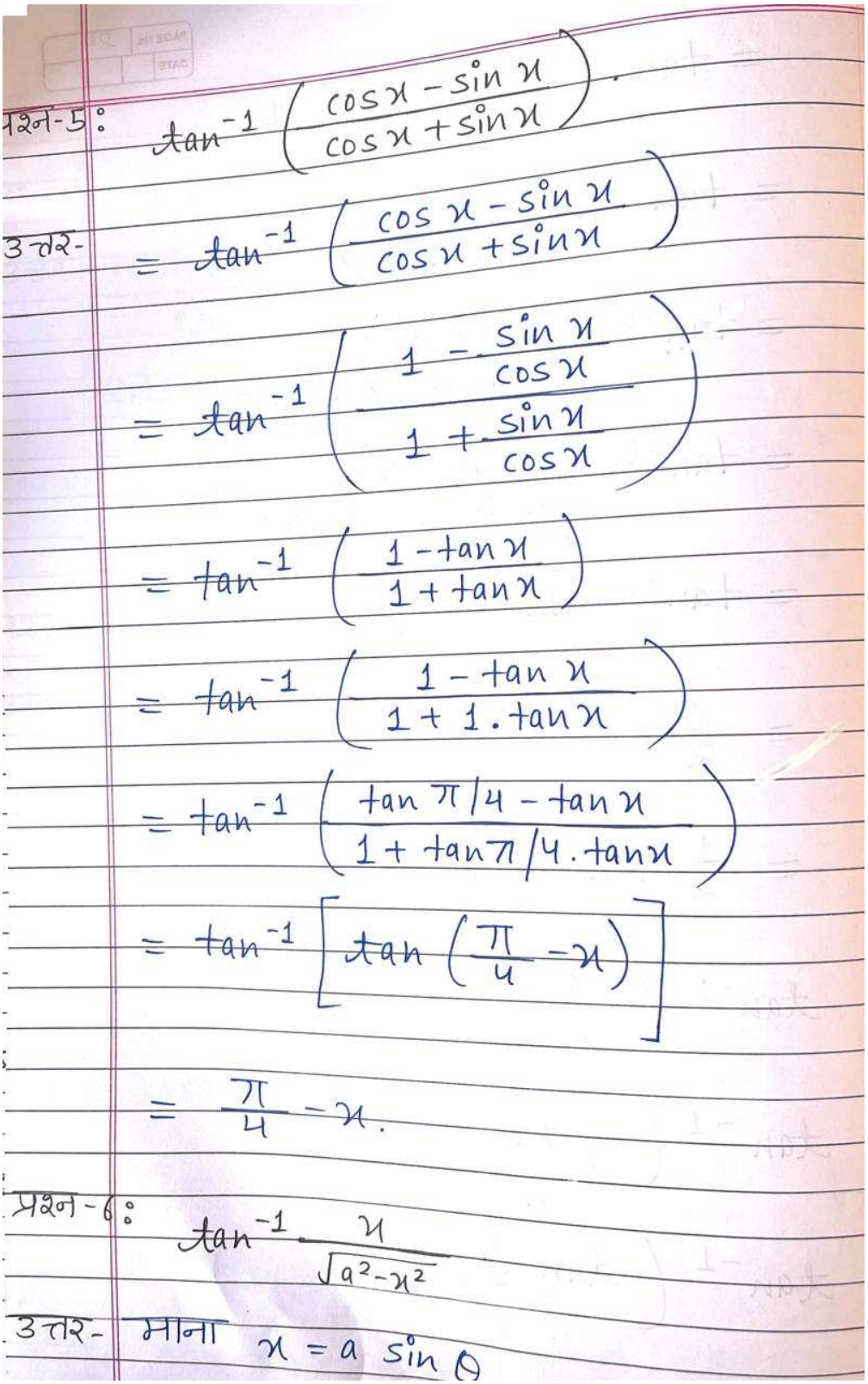
$= \dfrac{\theta}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\tan^{-1} x.$

प्रश्न-5: $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}\right)$.

उत्तर - $\tan^{-1}\left(\sqrt{\tan^2\dfrac{x}{2}}\right)$

$\tan^{-1}\left(\tan\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x}{2}.$



प्रश्न-5: $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$.

उत्तर- $= \tan^{-1}\left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1 - \tan x}{1 + 1 \cdot \tan x}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{\tan \pi/4 - \tan x}{1 + \tan \pi/4 \cdot \tan x}\right)$

$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]$

$= \frac{\pi}{4} - x.$

प्रश्न-6: $\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

उत्तर- माना $x = a \sin\theta$

$$= \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{a \sin\theta}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2\theta}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{a \sin\theta}{a\sqrt{1 - \sin^2\theta}} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{a \sin\theta}{a \cos\theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} (\tan\theta)$$

$$= \theta$$

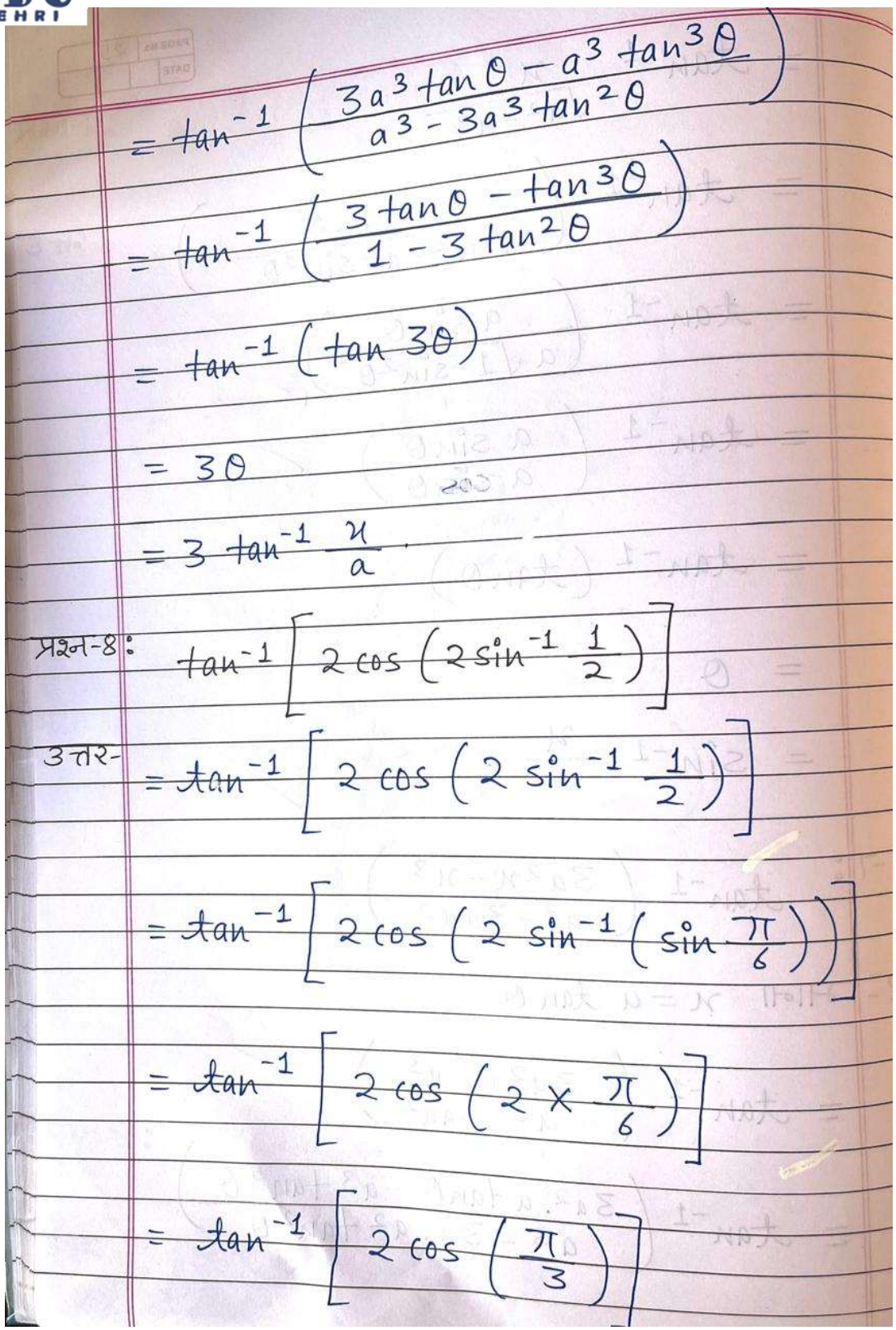
$$= \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

प्रश्न -7 : $\tan^{-1} \left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2} \right)$

उत्तर - माना $x = a \tan\theta$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{3a^2x - x^3}{a^3 - 3ax^2} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{3a^2 . a\tan\theta - a^3 \tan^3\theta}{a^3 - 3a . a^2 \tan^2\theta} \right)$$



$$= \tan^{-1}\left(\frac{3a^3\tan\theta - a^3\tan^3\theta}{a^3 - 3a^3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\tan 3\theta)$$

$$= 3\theta$$

$$= 3\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

प्रश्न-8: $\tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

उत्तर- $= \tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\frac{1}{2}\right)\right]$

$$= \tan^{-1}\left[2\cos\left(2\sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[2\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \tan^{-1}\left[2 \times \frac{1}{2}\right]$$

$$= \tan^{-1}[1] = \frac{\pi}{4}.$$

प्रश्न-9 : $\tan\frac{1}{2}\left[\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} + \cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right]$.

उत्तर -

$$= \tan\frac{1}{2}\left[2\tan^{-1}x + 2\tan^{-1}y\right]$$

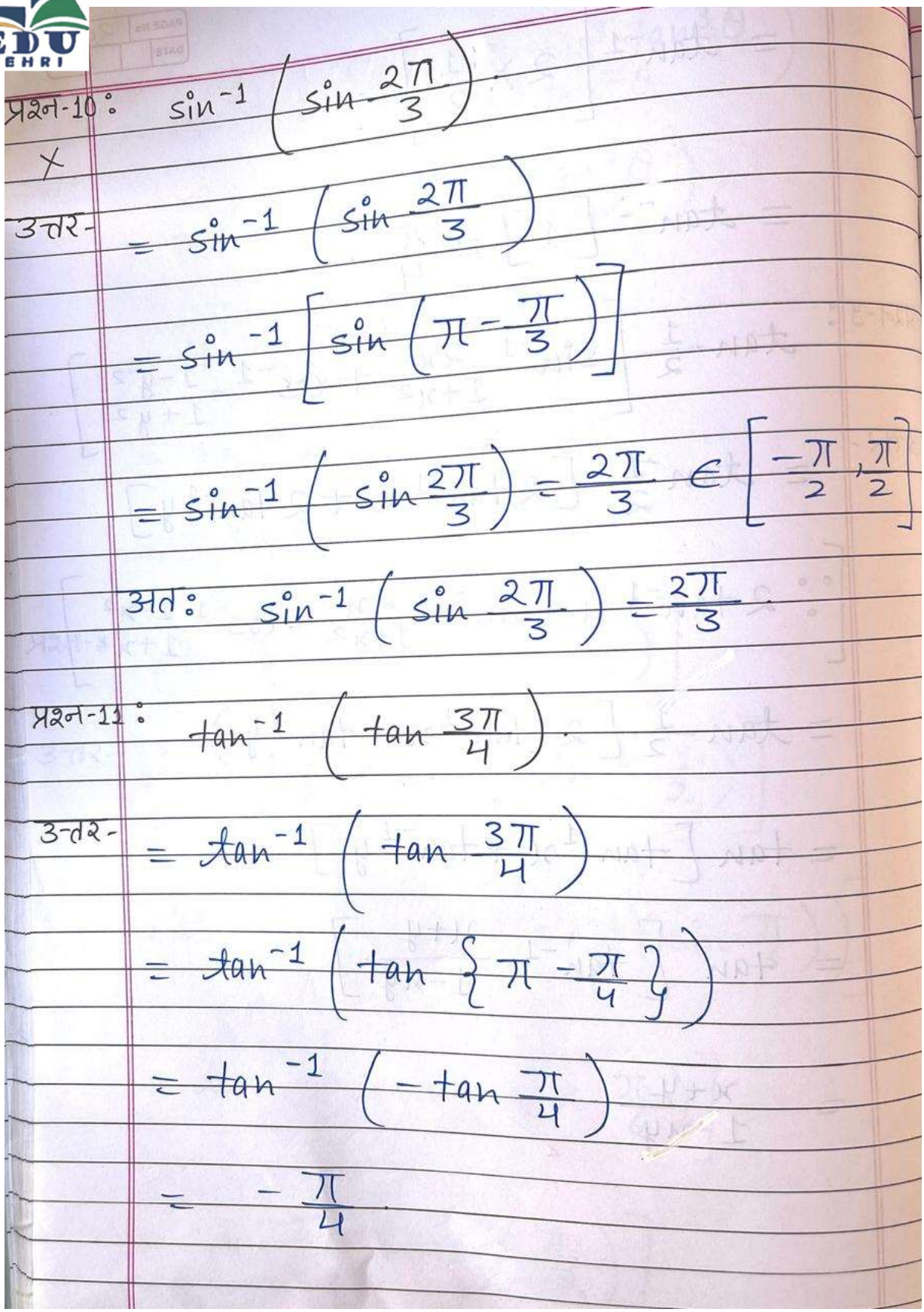
$$\left[\because 2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]$$

$$= \tan\frac{1}{2}\left[2\left(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y\right)\right]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}x + \tan^{-1}y\right]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}\right]$$

$$= \frac{x+y}{1-xy}.$$



प्रश्न-10 : $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

उत्तर- $= \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$= \sin^{-1}\left[\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

अतः $\sin^{-1}\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

प्रश्न-11 : $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$.

उत्तर- $= \tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\tan\left\{\pi - \frac{\pi}{4}\right\}\right)$

$= \tan^{-1}\left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\pi}{4}$.

प्रश्न-12: $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$

उत्तर- $=\tan^{-1}\frac{3}{\sqrt{5^2-3^2}}+\tan^{-1}\frac{2}{3}$

$\left[\because \sin^{-1}\frac{a}{b}=\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\right]$ &

$\left[\cot^{-1}\frac{a}{b}=\tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$

$=\tan\left(\tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right)$

$=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}\right)\right]$

$=\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{9+8}{4\times3}}{\frac{4\times3-3\times2}{4\times3}}\right)\right]$

$=\tan\left(\tan^{-1}\frac{17}{6}\right)$

$=17/6.$

प्रश्न-13: $\cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$.

उत्तर- $= \cos^{-1}\left(\cos \frac{7\pi}{6}\right)$

$= \cos^{-1}\left[\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$= \cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{6}\right)$

$= \frac{5\pi}{6}$.

प्रश्न-14: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

उत्तर- $= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\sin \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left\{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$

$= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin \frac{3\pi}{6}$

$= \sin \frac{\pi}{2} = 1$.

प्रश्न-15: $\tan^{-1}\sqrt{3} - \cot^{-1}(-\sqrt{3})$.

उत्तर-

$$= \tan^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{3}\right) - \cot^{-1}\left(-\cot\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \cot^{-1}\left[\cot\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{3} - \cot^{-1}\left(\cot\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi - 5\pi}{6}$$

$$= \frac{-3\pi}{6}$$

$$= -\frac{\pi}{2}.$$