पाठ - 11 : त्रि-विमीय ज्यामिति

प्रश्नावली - 11.1

> दिक् कोसाइन :-

$$\cos\alpha = l$$
$$\cos\beta = m$$
$$\cos\gamma = n$$

सम्बन्ध : $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

> दिक् अनुपात :-

$$l = \pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$m = \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$n = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

1. यदि एक रेखा x, y और z - अक्ष के साथ क्रमशः 90°, 135°, 45° के कोण बनाती है तो इसकी दिक् - कोसाइन ज्ञात कीजिए ।

उत्तर-

$$l = \cos 90^\circ = 0.$$

$$m = \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$n = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. एक रेखा की दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

उत्तर- $l = \cos\alpha$, $m = \cos\alpha$, $n = \cos\alpha$

$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$3\cos^2\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

अभीष्ट रेखा की दिक्-कोसाइन :-

$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

3. यदि रेखा की दिक्-अनुपात -18, 12, -4 हैं तो इसकी दिक्-कोसाइन क्या है?

उत्तर- $l = \frac{-18}{\sqrt{(-18)^2 + (12)^2 + (-4)^2}}$

$l = \frac{-18}{22}$

$l = \frac{-9}{11}$

$$m = \frac{12}{\sqrt{(-18)^2+(12)^2+(-4)^2}}$$

$$m = \frac{12}{22}$$

$$m = \frac{6}{11}$$

$$n = \frac{-4}{\sqrt{(-18)^2+(12)^2+(-4)^2}}$$

$$n = \frac{-4}{22}$$

$$n = \frac{-2}{11}$$

प्रश्न-5: दर्शाइए कि बिंदु (2,3,4), (-1,-2,1), (5,8,7) संरेख हैं।

उत्तर- दिक् अनुपात :-

$AB = (-1-2), (-2,-3), (1-4) = (-3,-5,-3)$

$BC = (5-(-1)), (8-(-2)), (7-1) = (6,10,6)$

$AB \parallel BC$, बिन्दु B उभयनिष्ठ है।

अत: बिन्दु A, B और C संरेख हैं।

प्रश्न-5 : एक त्रिभुज की भुजाओं की दिक् - कोसाइन ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज के शीर्ष बिंदु (3, 5, -4), (-1, 1, 2) और (-5, -5, -2) हैं।

उत्तर- दिक् कोसाइन,

$$AB = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(6)^2}}, \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(6)^2}}, \frac{6}{\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(6)^2}}$$

$$AB = \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{6}{2\sqrt{17}} = \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{3}{\sqrt{17}}$$

दिक् अनुपात,

$$AB = (-1-3), (1-5), (2-(-4)) = (-4, -4, 6)$$

$$BC = (-5-(-1)), (-5-1), (-2-2) = (-4, -6, -4)$$

$$CA = (-5, -3), (-5-5), (-2-(-4)) = (-8, -10, 2)$$

$$BC = \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}}, \frac{-4}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}}, \frac{6}{\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}}$$

$$BC = \frac{-4}{2\sqrt{17}}, \frac{-6}{2\sqrt{17}}, \frac{-4}{2\sqrt{17}} = \frac{-2}{\sqrt{17}}, \frac{-3}{\sqrt{17}}, \frac{-2}{\sqrt{17}}$$

$$AC = \frac{+8}{\sqrt{(+8)^2+(10)^2+(2)^2}}, \frac{+5}{\sqrt{(+8)^2+(10)^2+(2)^2}}, \frac{-2}{\sqrt{(+8)^2+(10)^2+(2)^2}}$$

$$AC = \frac{+8}{2\sqrt{42}}, \frac{+10}{2\sqrt{42}}, \frac{-2}{2\sqrt{42}}$$

$$AC = \frac{+4}{\sqrt{42}}, \frac{+5}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}$$

> बिन्दु A से जाने वाली तथा सदिश $\vec{b}$ के समांतर रेखा का समीकरण :-

$$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$$

> कार्तीय रूप :-

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

> यदि रेखा की दिक्-कोसाइन l, m, n हैं, तो रेखा का समीकरण :-

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण :-

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

> दो रेखाओं के मध्य कोण :-

$$\cos\theta = \left| \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \right|$$

> दिक् - अनुपात a_1, b_1, c_1 और a_2, b_2, c_2 वाली रेखाएँ

(i) लंबवत हैं, यदि $\theta = 90^\circ$, $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$.

(ii) समांतर हैं, यदि $\theta = 0^\circ$, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

> यदि दो रेखाओं $\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda\vec{b_1}$ और $\vec{r} = \vec{a_2} + \lambda\vec{b_2}$, के बीच का न्यूनकोण θ है तो

$$\cos\theta = \left| \frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}|\,|\vec{b_2}|} \right|$$

> दो रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी,

$$\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

प्रश्नावली - 11.2

1. दर्शाइए कि दिक् - कोसाइन $\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$; $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$; $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ वाली तीन रेखाएँ परस्पर लम्बवत हैं।

उत्तर- $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$

(i) पहली दो रेखाओं के लिए दिक्-कोसाइन :

$\frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$ और $\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

$$\frac{12}{13} \times \frac{4}{13} + \left(\frac{-3}{13}\right) \times \frac{12}{13} + \left(\frac{-4}{13}\right) \times \frac{3}{13}$$

$$\frac{48}{169} - \frac{36}{169} - \frac{12}{169} = 0$$

अत: रेखाएँ परस्पर लंब हैं।

(ii) दूसरी और तीसरी रेखाओं के लिए दिक् -कोसाइन :

$\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{3}{13}$ और $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$

$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

$$\frac{4}{13} \times \frac{3}{13} + \frac{12}{13} \times \left(\frac{-4}{13}\right) + \frac{3}{13} \times \frac{12}{13}$$

$$\frac{12}{169} - \frac{48}{169} + \frac{36}{169} = 0$$

अतः रेखाएँ परस्पर लंब हैं।

(iii) पहली और तीसरी रेखाओं के लिए दिक्-कोसाइन:

$$\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13} \text{ और } \frac{12}{13}, \frac{-3}{13}, \frac{-4}{13}$$

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

$$\frac{3}{13} \times \frac{12}{13} + \left(\frac{-4}{13}\right) \times \left(\frac{-3}{13}\right) + \frac{12}{13} \times \left(\frac{-4}{13}\right)$$

$$\frac{36}{169} + \frac{12}{169} - \frac{48}{169} = 0$$

अतः रेखाएँ परस्पर लंब हैं।

इसप्रकार, सभी रेखाएँ परस्पर लंब हैं।

. दर्शाइए कि बिन्दुओं (1, -1, 2), (3, 4, -2) से होकर जाने वाली रेखा बिन्दुओं (0, 3, 2) और (3, 5, 6) से जाने वाली रेखा पर लंब है।

5- दिक्-अनुपात,

$$AB = (3-1), (4-(-1)), (-2-2) = (2, 5, -4)$$

$$CD = (3-0), (5-3), (6-2) = (3, 2, 4)$$

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$

$2\times3 + 5\times2 + (-4)\times4$

$6+10-16=0$

अतः AB और CD परस्पर लम्ब हैं।

3. दर्शाइए कि बिन्दुओं (4,7,8), (2,3,4) से होकर जाने वाली रेखा, बिन्दुओं (-1,-2,1), (1,2,5) से जाने वाली रेखा के समान्तर है।

उत्तर- दिक् - अनुपात,

$AB = (2-4), (3-7), (4-8) = (-2,-4,-4)$

$CD = (1-(-1)), (2-(-2)), (5-1) = (2,4,4)$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{4} = -1.$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

अतः रेखा AB, रेखा CD के समांतर है।

4. बिन्दु (1,2,3) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो सदिश $3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ के समांतर है।

उत्तर- $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$

$\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})$

अतः ये अभीष्ट रेखा का समीकरण है।

5. बिन्दु जिसकी स्थिति सदिश $2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ से गुजरने व सदिश $\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ की दिशा में जाने वाली रेखा का सदिश और कार्तीय रूपों में समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

$\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$

$\vec{r} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} + \lambda(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k})$

अतः ये अभीष्ट रेखा का सदिश समीकरण है।

माना $\vec{r} = x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}$

$$x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k} = (\lambda + 2)\hat{i} + (2\lambda - 1)\hat{j} - (-\lambda + 4)\hat{k}$$

दोनों पक्षों की तुलना करके तथा λ को विलोपित करने पर, कार्तीय समीकरण निम्नलिखित है :

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

6. उस रेखा का कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(-2, 4, -5)$ से जाती है और $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समान्तर है।

उत्तर- रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के दिक्-अनुपात 3, 5 और 6.

अभीष्ट रेखा, दी गई रेखा $\frac{x+3}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+8}{6}$ के समांतर है।

दिक्-कोसाइन - $3k, 5k$ और $6k$, $k \neq 0$.

दिक्-अनुपात - a, b, c

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण ;

$$\frac{x+2}{3k} = \frac{y-4}{5k} = \frac{z+5}{6k}$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+5}{6} = k.$$

7. एक रेखा का कार्तीय समीकरण $\frac{x-5}{3} = \frac{y+4}{7} = \frac{z-6}{2}$ है। इसका सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\vec{a} = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{b} = 3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$

$\vec{r} = (5\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}) + \lambda(3\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$

अतः ये रेखा का सदिश समीकरण है।

8. निम्नलिखित रेखा - युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $\vec{r} = 2\hat{i} - 5\hat{j} + \hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k})$ और
$\vec{r} = 7\hat{i} - 6\hat{k} + \mu(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$

उत्तर- $\vec{b_1} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{(3)^2+(2)^2+(6)^2} = 7.$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{(1)^2+(2)^2+(2)^2} = 3.$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (3\hat{i}+2\hat{j}+6\hat{k})\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = 3\times1+2\times2+6\times2$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = 3+4+12 = 19.$

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}|\,|\vec{b_2}|}\right| = \frac{19}{7\times3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{19}{21}\right)$$

(ii) $\vec{r} = 3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}+\lambda(\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})$ और

$\vec{r} = 2\hat{i}-\hat{j}-56\hat{k}+\mu(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

उत्तर- $\vec{b_1} = \hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}$

$\vec{b_2} = 3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k}$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{6}$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{(3)^2+(-5)^2+(-4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})\cdot(3\hat{i}-5\hat{j}-4\hat{k})$

$= 1.3-1(-5)-2(-4) = 3+5+8 = 16.$

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}|\,|\vec{b_2}|}\right| = \frac{16}{\sqrt{6}.5\sqrt{2}}$$

$$\cos\theta = \frac{16}{\sqrt{3}.\sqrt{2}.5\sqrt{2}} = \frac{16}{10\sqrt{3}} = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{8}{5\sqrt{3}}\right)$$

9. निम्नलिखित रेखा- युग्मों के बीच का कोण ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+3}{-3}$ और $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-4}{8} = \frac{z-5}{4}$.

उत्तर- $\vec{b_1} = 2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}$ और $\vec{b_2} = -\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

$$|\vec{b_1}| = \sqrt{(2)^2+(5)^2+(-3)^2} = \sqrt{38}.$$

$$|\vec{b_2}| = \sqrt{(-1)^2+(8)^2+(4)^2} = \sqrt{81} = 9.$$

$$\vec{b_1}\cdot\vec{b_2} = (2\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}).(-\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k})$$

$$= 2(-1) + 5\times 8 + (-3).4 = -2+40-12 = 26.$$

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1}\cdot\vec{b_2}}{|\vec{b_1}|\,|\vec{b_2}|}\right|$$

$$\cos\theta = \frac{26}{9\sqrt{38}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{26}{9\sqrt{38}}\right)$$

(ii) $\frac{x}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x-5}{4} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{8}$

उत्तर- $\vec{b_1} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ और $\vec{b_2} = 4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k}$

$|\vec{b_1}| = \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3.$

$|\vec{b_2}| = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (8)^2} = \sqrt{81} = 9.$

$\vec{b_1} \cdot \vec{b_2} = (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \cdot (4\hat{i} + \hat{j} + 8\hat{k})$

$= 2\times4 + 2\times1 + 1\times8 = 8 + 2 + 8 = 18.$

$$\cos\theta = \left|\frac{\vec{b_1} \cdot \vec{b_2}}{|\vec{b_1}|\,|\vec{b_2}|}\right|$$

$$\cos\theta = \frac{18}{3\times9} = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

). p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $\frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{2p} = \frac{z-3}{2}$ और $\frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$

परस्पर लंब हों ।

उत्तर- दिक्-अनुपात, $-3, \frac{2p}{7}, 2$ और $\frac{-3p}{7}, 1, -5$.

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

$(-3).\left(\frac{-3p}{7}\right) + \left(\frac{2p}{7}\right).(1) + (2).(-5) = 0$

$\frac{9p}{7} + \frac{2p}{7} = 10$

$11p = 70$

$p = \frac{70}{11}$

11. दिखाइए कि रेखाएँ $\frac{x-5}{+7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ और $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ परस्पर लंब हैं ।

उत्तर- दिक् अनुपात, $-3, -5, 1$ और $1, 2, 3$.

$a_1.a_2 + b_1.b_2 + c_1.c_2 = 0$

$7 \times 1 + (-5) \times 2 + 1 \times 3 = 7 - 10 + 3 = 0$

अतः दी गई रेखाएँ परस्पर लंब हैं ।

12. रेखाओं $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- न्यूनतम दूरी;

$$\vec{a_1} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{b_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{a_2} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{b_2} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

$$\vec{a_2} - \vec{a_1} = \hat{i} - 3\hat{j} - 2\hat{k}$$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2-1)\hat{i} - (2-2)\hat{j} + (1+2)\hat{k} = -3\hat{i} + 3\hat{k}$$

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}.$$

$$d = \left| \frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{(-3\hat{i}+3\hat{k}) \cdot (\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{-3(1)+3(-2)}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \left| \frac{-9}{3\sqrt{2}} \right|$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

13. रेखाओं $\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$ और $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर-

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2+(c_1a_2-c_2a_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}}$$

$x_1 = -1, y_1 = -1, z_1 = -1$

$a_1 = 7, b_1 = -6, c_1 = 1$

$x_2 = 3, y_2 = 5, z_2 = 7$

$a_2 = 1, b_2 = -2, c_2 = 1$

$$d = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 7 & -6 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(-6+2)^2+(1+7)^2+(-14+6)^2}}$$

$$d = \frac{4(-6+2)-6(7-1)+8(-14+6)}{\sqrt{16+36+64}}$$

$$d = \frac{-16-36-64}{\sqrt{116}}$$

$$d = \frac{-116}{2\sqrt{29}}$$

$$d = \frac{-58}{\sqrt{29}}$$

$$d = -2\sqrt{29}$$

रेखाओं के बीच की दूरी $2\sqrt{29}$ इकाई है।

रेखाएँ, जिनके सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) + \lambda(\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k})$ और

$\vec{r} = 4\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k} + \mu(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$.

$\vec{r} = \vec{a_1} + \lambda \cdot \vec{b_1}$ और $\vec{r_1} = \vec{a_2} + \mu \vec{b_2}$

$\vec{b_1} = \hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$

$\vec{a_2} = 4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$\vec{b_2} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (4\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}) - (\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= 3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= (-3-6)\hat{i} - (1-4)\hat{j} + (3+6)\hat{k}$

$= -9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}$

$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(-9)^2 + (3)^2 + (9)^2} = \sqrt{81+9+81}$

$= 3\sqrt{19}$

$(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = (-9\hat{i} + 3\hat{j} + 9\hat{k}) \cdot$

$(3\hat{i} + 3\hat{j} + 3\hat{k}) = -9 \times 3 + 3 \times 3 + 9 \times 3 = 9.$

$$d = \left| \frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{9}{3\sqrt{19}} \right| = \frac{3}{\sqrt{19}} \text{ इकाई.}$$

15. रेखाएँ, जिनकी सदिश समीकरण निम्नलिखित हैं, के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए :

$\vec{r} = (1-t)\hat{i} + (t-2)\hat{j} + (3-2t)\hat{k}$ और

$\vec{r} = (s+1)\hat{i} + (2s-1)\hat{j} - (2s+1)\hat{k}$.

उत्तर- $\vec{r} = (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}) + t(-\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}) \ldots (1)$

$\vec{r} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + s(\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) \ldots (2)$

$\vec{a_1} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$

$\vec{b_1} = -\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{a_2} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{b_2} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{a_2} - \vec{a_1} = (\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) - (\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k})$

$= \hat{j} - 4\hat{k}$

$$\vec{b_1} \times \vec{b_2} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$= (-2+4)\hat{i} - (2+2)\hat{j} + (-2-1)\hat{k} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$

$$|\vec{b_1} \times \vec{b_2}| = \sqrt{(2)^2+(-4)^2+(-3)^2}$$

$$= \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$$

$$(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1}) = (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (\hat{j} - 4\hat{k}) = -4+12 = 8.$$

$$d = \left| \frac{(\vec{b_1} \times \vec{b_2}) \cdot (\vec{a_2} - \vec{a_1})}{|\vec{b_1} \times \vec{b_2}|} \right|$$

$$d = \left| \frac{8}{\sqrt{29}} \right|$$

अतः रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी $8/\sqrt{29}$ है।